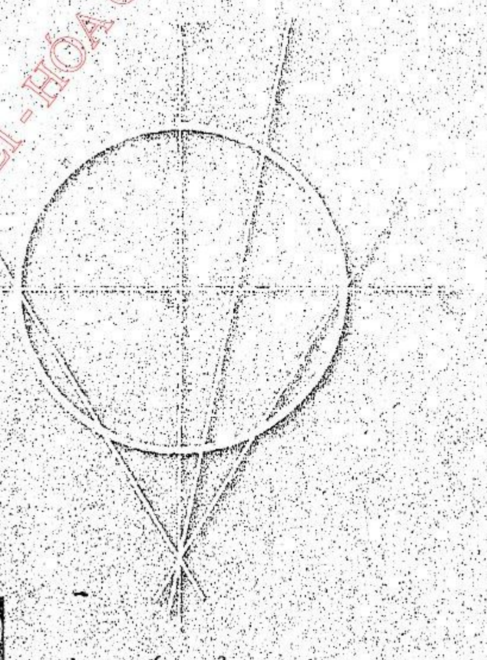
ĐỖ THANH SƠN

Một số chuyên đề HÌNH HỌC PHẲNG bồi dưỡng học sinh giỏi

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐỖ THANH SƠN

Một số chuyên đề HÌNH HỌC PHẲNG bồi dưỡng học sinh giỏi

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

24-2010/CXB/354-2242/GD Mã số: C3T06h0- TTS

Lời nói đầu

Toán học là một môn học quan trọng trong chương trình phổ thông. Việc giảng dạy và học tập môn Toán trong trường phổ thông không những nhằm trang bị cho học sinh những kiến thức cụ thể để áp dụng trong cuộc sống cũng như trong các môn học khác mà điều quan trọng hơn là cung cấp, rèn luyện cho học sinh các kĩ năng, phương pháp tư duy của Toán học, điều mà học sinh cần thiết trong cả cuộc đời sau này.

Bộ sách "***Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi THPT***" gồm các chuyên đề tự chọn đặc sắc theo chương trình dành cho chuyên Toán của Bộ Giáo dục ban hành. Bộ sách là kết tinh từ kinh nghiệm giảng dạy và bồi dưỡng học sinh của các thầy cô giáo ở khối Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, khối Chuyên Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, trường THPT Chuyên Bắc Giang nhằm cung cấp thêm cho các em học sinh một số kiến thức bổ sung, giúp các em hiểu sâu hơn sách giáo khoa và chuẩn bị cho các kì thi tốt nghiệp THPT, thi tuyển sinh vào đại học và thi học sinh giỏi các cấp. Bộ sách gồm năm cuốn :

Một số chuyên đề Hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;

Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;

Một số chuyên đề Toán rời rạc bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;

Một số chuyên đề Giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT ;

Một số chuyên đề Hình học không gian bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.

Cuốn sách ***Một số chuyên đề Hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*** gồm hai mươi chuyên đề liên quan đến hình học phẳng và ứng dụng của hình học vào đại số. Trong đó có mười bốn chuyên đề dành cho hình học phẳng và sáu chuyên đề dành cho ứng dụng của hình học vào đại số. Các chuyên đề về hình học đề cập đến một số đối tượng đặc biệt như điểm Migen, điểm Brôcar, đường đẳng giác, đường đối trung, đường thẳng Ơ-le, đường tròn Ơ-le, tam giác Pê-đan, tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau, tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc và tứ giác toàn phần. Mỗi chuyên đề gồm nhiều bài toán từ dễ đến khó. Nội dung của các bài toán trong mỗi chuyên đề xoay quanh các tính chất hình học thuộc chuyên đề đó. Chẳng hạn các bài toán thuộc chuyên đề "Các đường đẳng giác trong một góc" được phân ra một số dạng sau : dạng toán thứ nhất, tập trung vào các tính chất hình học của các đường này ; dạng toán thứ hai, tìm điều kiện cần và đủ để hai đường là đẳng giác ; dạng toán thứ ba, sử dụng các đường đẳng giác để giải một số bài toán hình học khác. Lời giải của mỗi bài toán trong mỗi chuyên đề ngắn gọn, dễ hiểu. Các kiến thức được dùng để giải các bài toán này chỉ nằm trong chương trình sách giáo khoa Trung học cơ sở và Trung học phổ thông. Các chuyên đề ứng dụng của hình học vào đại số chủ yếu đề cập đến một số dạng toán cực trị của biểu thức đại số ; biện luận nghiệm của phương trình vô tỉ chứa căn bậc hai và hệ phương trình hai ẩn. Phương pháp giải các bài toán trong các chuyên đề này là phương pháp đồ thị. Một số kết quả trong hình học được dùng để xây dựng phương pháp trên đều có chứng minh chặt chẽ.

Mục đích của cuốn sách là giúp học sinh hệ thống các kiến thức hình học, nhận dạng được từng bài toán và đưa ra phương pháp giải các bài toán đó. Giáo viên dựa vào mỗi chuyên đề hoặc liên kết các chuyên đề để xây dựng bài tập phục vụ cho công việc giảng dạy.

Cuốn sách này có thể được dùng cho nhiều đối tượng học sinh. Đối với học sinh có nhu cầu thi vào đại học, các bạn chỉ cần học các chuyên đề ứng dụng của hình học vào đại số. Đối với học sinh có nhu cầu thi học sinh giỏi cấp Trung học phổ thông cần đọc hết hai mươi chuyên đề. Đối với học sinh Trung học cơ sở có nhu cầu nâng cao trình độ về hình học hoặc thi học sinh giỏi cấp trường, tỉnh (thành phố) hoặc vào các trường chuyên chỉ cần đọc mười hai chuyên đề về hình học.

Tác giả rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp cho cuốn sách để lần tái bản sau chất lượng sách được tốt hơn. Các ý kiến của bạn đọc xin gửi về ban Toán – Tin, Công ty cổ phần Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B Giảng Võ, Hà Nội.

Xin chân thành cảm ơn.

Tác giả

Hà Nội, tháng 4 năm 2009

CHUYÊN ĐỀ 1

TỨ GIÁC NỘI TIẾP CÓ TÍCH CÁC CẶP CẠNH ĐỐI DIỆN BẰNG NHAU

Tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau là loại tứ giác được sử dụng để xây dựng các bài toán hình học. Tập hợp các bài tập dưới đây là những tính chất tương đương. Một số bài toán khác được xây dựng từ các tính chất đó.

BÀI TẬP

1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng :

a) Điều kiện cần và đủ để các đường phân giác của $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ đi qua một điểm trên BD là AB.CD = AD. BC.

b) Nếu các phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ đi qua một điểm trên BD thì các phân giác của các góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACD}$ đi qua một điểm trên AC.

2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp có đường chéo AC không đi qua tâm đường tròn. Chứng minh rằng :

a) Điều kiện cần và đủ để các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tứ giác tại A và C cắt nhau trên BD là AB.CD = AD.BC ;

b) Nếu các đường chéo của tứ giác không đi qua tâm và tiếp tuyến với đường tròn tại A và C cắt nhau trên BD thì các tiếp tuyến với đường tròn tại B và D cắt nhau trên AC.

3. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của D trên AB, BC, CA. Chứng minh rằng PM = PN khi và chỉ khi AB.CD = AD.BC.

4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. M là trung điểm đường chéo AC.

a) Chứng minh rằng AC là phân giác của góc $\widehat{BMD}$ khi và chỉ khi AB.CD = AD.BC.

b) Kí hiệu N là trung điểm của BD. Chứng minh rằng nếu AC là phân giác của góc $\widehat{BMD}$ thì BD là phân giác của góc $\widehat{ANC}$.

5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn O và M là trung điểm của đường chéo BD. Chứng minh rằng AC và AM đối xứng với nhau qua phân giác góc $\widehat{BAD}$ khi và chỉ khi AB.CD = AD.BC.

6. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng hình chiếu của trung điểm hai đường chéo tứ giác trên hai cạnh AB và BC nằm trên cùng một đường tròn khi và chỉ khi AB.CD = AD.BC.

7. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D nằm trên đường tròn (O). Giả sử M là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại các điểm A và B ; N là giao điểm các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại các điểm C và D. Chứng minh rằng giao điểm của các đường thẳng AC và BD cũng như của AD và BC (nếu tồn tại) nằm trên đường thẳng MN. Giả sử AB và CD cắt nhau tại H, khi đó OH vuông góc với đường thẳng MN.

8. Cho bát giác lồi $A_1A_2...A_8$ nội tiếp đường tròn tâm O, các đường chéo A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8 cắt nhau tại H (H khác O). Giả sử A_1A_3 cắt A_5A_7 tại M ; A_1A_7 cắt A_3A_5 tại N ; A_2A_4 cắt A_8A_6 tại P ; A_2A_8 cắt A_4A_6 tại Q. Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

9. Hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại hai điểm A và B. Từ điểm M trên tia BA ta kẻ tới đường tròn (O') các tiếp tuyến MC và MD (C, D là tiếp điểm). Các đường thẳng AC và AD thứ tự cắt đường tròn (O) lần thứ hai tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{CA}{CP} = \dfrac{DA}{DQ}$;

b) CD đi qua trung điểm của PQ ;

c) Khi M thay đổi trên tia BA thì đường thẳng CD đi qua một điểm cố định.

10. Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Các điểm A', B', C' tương ứng là các tiếp điểm của (O) với BC, CA, AB. Giả sử BC cắt B'C' tại P ; CA cắt C'A' tại Q ; AB cắt A'B' tại R. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

11. Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn và thoả mãn điều kiện

$$\frac{AB}{BC}.\frac{CD}{DE}.\frac{EF}{FA}=1.$$

Giả sử P là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại A và D ; Q là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại B và E ; K là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại C và F. Chứng minh rằng các điểm P, Q, K thẳng hàng.

12. Hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại các điểm A và B. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm C sao cho C nằm trong (O'). Các đường thẳng AC và BC cắt (O') lần thứ hai tại các điểm P, Q. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\widehat{OAO'}=90^0$ thì PQ là đường kính của (O').

b) Nếu PQ là một đường kính của (O') đối với mỗi điểm C bất kì trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và nằm trong (O') (C có thể trùng với A hoặc B) thì $\widehat{OAO'}=90^0$.

13. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi P là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và C ; M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) lần thứ hai tại Q. Đường thẳng PQ cắt đường tròn (O) lần thứ hai tại K. Chứng minh rằng AK // BC.

14. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và dây cung DD' của đường tròn vuông góc với AC tại M. Đường thẳng đi qua M và song song với BD' cắt các đường thẳng AB và BC tương ứng tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn PQ khi và chỉ khi AB.CD = AD.BC.

15. Cho tam giác ABE. Giả sử đường tròn đi qua hai điểm A, B cắt các cạnh EA và EB lần lượt tại D và C. Gọi F là giao điểm của AC và BD ; M là trung điểm của đoạn CD. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM ta lấy điểm N khác M sao cho AN.BM = AM.BN. Chứng minh rằng N nằm trên đường thẳng EF.

16. Giả sử ABCD là một tứ giác nội tiếp. Các điểm P. Q, R lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng PQ = QR khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên AC. *(Đề thi thi vô địch Toán quốc tế năm 2003).*

17. A, B, C là ba điểm phân biệt theo thứ tự đó nằm trên cùng một đường thẳng. Xét đường tròn (O) đi qua hai điểm A và C, có tâm không nằm trên đường thẳng AC. Gọi P là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại các điểm A và C. Đường thẳng PB cắt (O) tại các điểm Q và Q' (Q nằm trên đoạn PB). Phân giác của góc $\widehat{AQC}$ cắt AC tại R.

a) Chứng minh rằng R là điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi. *(Bài toán được đề nghị xét chọn trong kì thi Toán quốc tế năm 2003).*

b) Gọi P' là giao điểm các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại các điểm Q và Q'. Chứng minh rằng P' cố định khi (O) thay đổi.

18. Cho tứ giác ABCD nội tiếp thoả mãn điều kiện AB.CD = AD.BC. Giả sử đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với BC cắt đường chéo BD tại M. Chứng minh rằng MB = MD.

19. Cho tứ giác ABCD thoả mãn đồng thời các điều kiện AB.CD = AD.BC và $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} \neq \widehat{BCA} + \widehat{CAD}$. Gọi M là trung điểm của đường chéo AC, E là điểm trên đường thẳng BM sao cho DE // AC. Chứng minh rằng nếu tứ giác ACED là một hình thang cân thì tứ giác ABCD nội tiếp.

20. Cho tứ giác ABCD thoả mãn điều kiện AB.CD = AD.BC và $\widehat{BAD} + \widehat{BID} = 270^0$ (I là giao điểm của đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và AC). Giả sử P, Q lần lượt là hình chiếu của A nằm trên các đoạn BI và DI. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp.

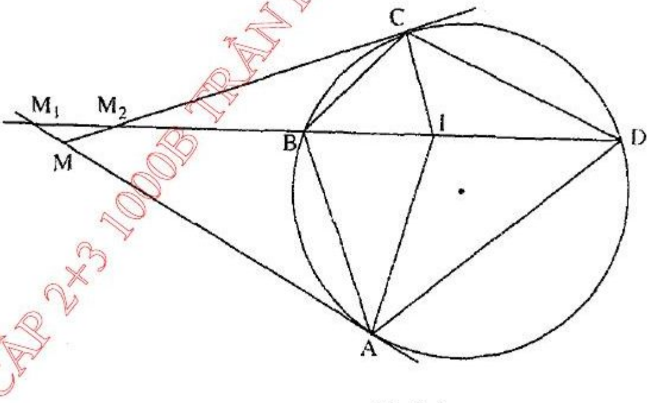
21. Cho tứ giác ABCD thoả mãn đồng thời các điều kiện AB.CD = AD.BC và $\widehat{ADB} + \widehat{CBD} \neq \widehat{ABD} + \widehat{BDC}$. Gọi M là trung điểm của BD. Chứng minh rằng nếu BD là phân giác của góc $\widehat{AMC}$ thì tứ giác ABCD nội tiếp.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. a) Gọi I là điểm trên BD mà phân giác góc $\widehat{BAD}$ đi qua. khi đó ta có $\frac{IB}{ID}=\frac{AB}{AD}$. Từ giả thiết ta suy ra $\frac{CB}{CD}=\frac{AB}{AD}$. Vì vậy ta có $\frac{IB}{ID}=\frac{CB}{CD}$. Hệ thức này chứng tỏ CI là phân giác của $\widehat{BCD}$. Đảo lại, nếu phân giác của hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ cùng đi qua I thì $\frac{IB}{ID}=\frac{AB}{AD}$ và $\frac{IB}{ID}=\frac{CB}{CD}$. Từ đó ta được điều cần chứng minh. (Giả thiết tứ giác ABCD nội tiếp không được sử dụng trong chứng minh).

b) Sử dụng kết quả câu a).

2. a) Giả sử M là giao điểm các tiếp tuyến với đường tròn tại A và C nằm trên đường thẳng BD. Gọi I là điểm trên BD mà phân giác của góc $\widehat{BAD}$ đi qua. Rõ ràng tam giác MAI cân tại M nên MI = MA (H.1).



Hình 1

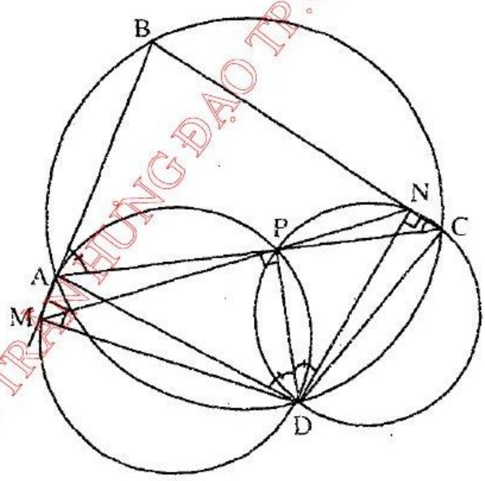
Tam giác MCI có MI = MC nên tam giác này cân. Vì $\widehat{BCM}=\widehat{CDM}$ nên $\widehat{BCI}=\widehat{DCI}$ và CI là phân giác góc $\widehat{BCD}$. Tóm lại từ M nằm trên BD suy ra phân giác của $\widehat{BCD}$ và $\widehat{BAD}$ cắt nhau trên BD. Theo Bài toán 1, điều này dẫn đến AB.CD = AD.BC. Ngược lại, nếu AB.CD = AD.BC, khi đó AI và BI là các phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ với I trên BD. Giả sử đường thẳng BD lần lượt cắt MA, MC tại M_1, M_2 và coi M_2 nằm trên đoạn M_1B. Từ MA = MC, MA = $M_1A - M_1M$,MC = $MM_2 + M_2C$, $M_2C = M_2I$ và $M_1A = M_1I$, ta suy ra$M_1M_2 = M_1M + MM_2$. Đẳng thức này chứng tỏ ba điểm M_1, M_2 và M trùng nhau.

b) Nếu tiếp tuyến với đường tròn tại A và C cắt nhau trên đường thẳng BD thì AB.CD = AD.BC. Theo câu a) và từ AB.CD = AD.BC với BD không đi qua tâm đường tròn, ta suy ra tiếp tuyến tại B và D với đường tròn cắt nhau. Khi đó giao điểm nằm trên AC.

3. (H.2) Coi điểm M nằm ngoài cạnh AB, khi đó P và N nằm trên các cạnh AC và BC. Trong tứ giác nội tiếp AMDP ta có $\widehat{MDP} = \widehat{BAC}$. Trong tứ giác nội tiếp CNPD ta có $\widehat{NDP} = \widehat{ACB}$. Sử dụng định lí hàm số sin đối với tam giác DPM và tam giác DPN, ta có

PM = AD.sin $\widehat{MDP}$ = AD.sin $\widehat{BAC}$ (AD là đường kính của đường tròn) và

PN = CD.sin $\widehat{NDP}$ = CD.sin $\widehat{BCA}$ (CD là đường kính của đường tròn).



Hình 2

Xét tỉ số $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AD}{CD}.\dfrac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{BCA}}$,

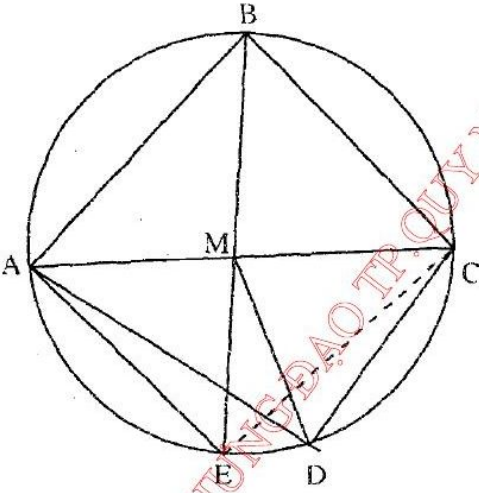
nếu AB.CD = AD.BC thì ta có $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AD}{CD}.\dfrac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{BCA}} = \dfrac{AB}{BC}.\dfrac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{BCA}} = 1$.

Ngược lại, nếu PM = PN thì ta có

$$\frac{PM}{PN} = \frac{AD}{CD}.\frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{BCA}} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{\sin\widehat{BCA}}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{AB}{BC}.$$

4. a) (H.3) Gọi E là giao điểm của BM và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó diện tích của hai tam giác ABE và CBE bằng nhau. Điều đó tương đương với AB.AE.sin BAE = BC.CE.sin BCE $\Leftrightarrow$ AB.AE = BC.CE (*) (vì $\sin\widehat{BAE} = \sin\widehat{BCE}$). Nếu AC là phân giác của góc $\widehat{BMD}$ thì $\widehat{BMA} = \widehat{DMA}$. Mặt khác, $\widehat{BMA} = \widehat{EMC}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{EMC} = \widehat{DMA}$. Điều này chứng tỏ D đối xứng với E qua đường kính của đường tròn đi qua M và ta có AD = CE, CD = AE. Thay kết quả này vào (*) ta được điều cần chứng minh.

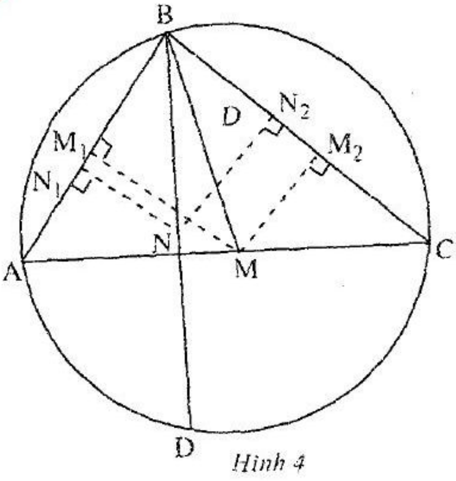
Ngược lại, từ AB.CD = AD.BC và (*) ta suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{CE}{AE}$. Điều này dẫn tới hai tam giác ADE và CED đồng dạng (c.g.c). Ta biết rằng hai tam giác đồng dạng cùng nội tiếp trong một đường tròn thì hai tam giác đó bằng nhau. Vì vậy AD = CE và AE = CD. Hai tam giác MAD và MCE bằng nhau nên $\widehat{CME} = \widehat{DMA}$. Mặt khác $\widehat{BMA} = \widehat{EMC}$ vì đối đỉnh. Kết hợp các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.



Hình 3

5. Gọi E là giao điểm của AM và đường tròn (O). Vì diện tích các tam giác ABE và ADE bằng nhau nên AB.BE = AD.DE (*). Nếu AC đối xứng với AM qua phân giác góc $\widehat{BAD}$ thì $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE} \Rightarrow$ BC = DE và BE = CD. Thay kết quả này vào (*) ta được điều cần chứng minh. Điều ngược lại dành cho bạn đọc tự chứng minh.

6. (H.4) Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Các hình chiếu M_1, M_2 của M tương ứng trên các cạnh AB và BC. Các hình chiếu N_1, N_2 tương ứng của N trên các cạnh AB và BC. Nếu M_1, M_2, N_1, N_2 nằm trên cùng một đường tròn thì $BM_1.BN_1 = BM_2.BN_2$. Điều này chứng tỏ hai tam giác BM_1M_2 và BN_2N_1 đồng dạng, kéo theo $\widehat{BM_2M_1} = \widehat{BN_1N_2}$.



Hình 4

Từ các tứ giác nội tiếp BM_1MM_2 và BN_1NN_2, ta suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{CBD}$. Đẳng thức này chứng tỏ BM đối xứng với BD qua phân giác góc $\widehat{ABC}$. Theo kết quả Bài 5, ta suy ra điều cần chứng minh. Phần đảo dành cho bạn đọc tự chứng minh.

7. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AM và DN, của BM và CN. Trường hợp MENF là một tứ giác lồi ngoại tiếp đường tròn (O). Giả sử AD cắt MN tại P. Sử dụng định lí Mê-nê-la-uýt cho tam giác MNE với cát tuyến DAP ta có $\frac{\overline{ED}}{\overline{DN}}.\frac{\overline{NP}}{\overline{PM}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{AE}}=-1 \Rightarrow -\frac{\overline{ED}}{\overline{DN}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{NP}}$. Kí hiệu P' là giao điểm của BC và MN, lập luận tương tự ta có $-\frac{\overline{FC}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{MB}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{P'M}}{\overline{NP'}}$.

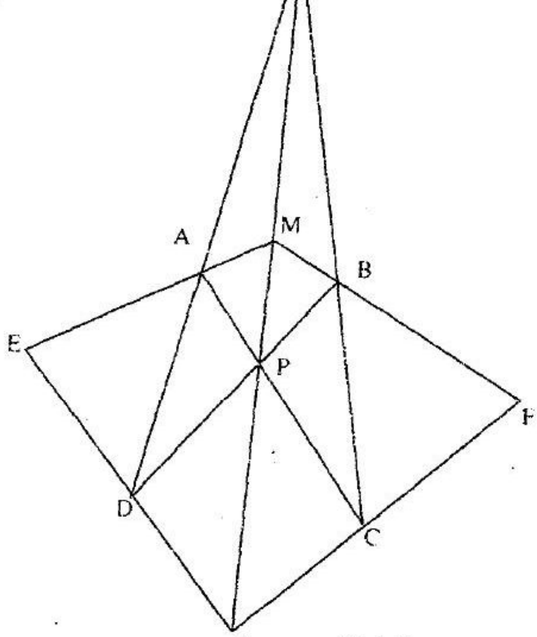
Mặt khác, $\left|-\frac{\overline{ED}}{\overline{DN}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{AE}}\right|=\frac{ED}{DN}.\frac{MA}{AE}=\frac{MA}{DN}$

$\left|-\frac{\overline{FC}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{MB}}{\overline{BF}}\right|=\left|-\frac{\overline{FC}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{MB}}{\overline{BF}}\right|=\frac{FC}{CN}.\frac{MB}{BF}=\frac{MB}{NC}$ và $\frac{MA}{ND}=\frac{MB}{CN}$.

Điều đó chứng tỏ P và P' chia ngoài đoạn MN theo cùng tỉ số. Vì vậy P và P' trùng nhau. Gọi Q là giao điểm của AC và MN, khi đó Q nằm trên đoạn MN. Kẻ các đường cao MM_1 và NN_1 của các tam giác MAQ và NCQ.

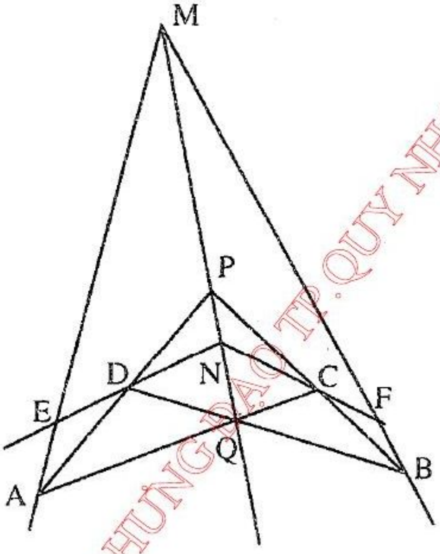
Ta có $\frac{MQ}{NQ}=\frac{MM_1}{NN_1}=\frac{MA}{NC}$

(vì $\sin\widehat{MAQ}=\sin\widehat{NCQ}$). Gọi Q' là giao điểm của BD và MN, khi đó Q' nằm trên đoạn thẳng MN. Lập luận tương tự ta có $\frac{MQ'}{NQ'}=\frac{MB}{ND}$. Vì MB = MA, NC = ND nên $\frac{MA}{NC}=\frac{MB}{ND} \Leftrightarrow \frac{MQ}{NQ}=\frac{MQ'}{NQ'}$. Từ đó ta suy ra Q và Q' trùng nhau (H.5).



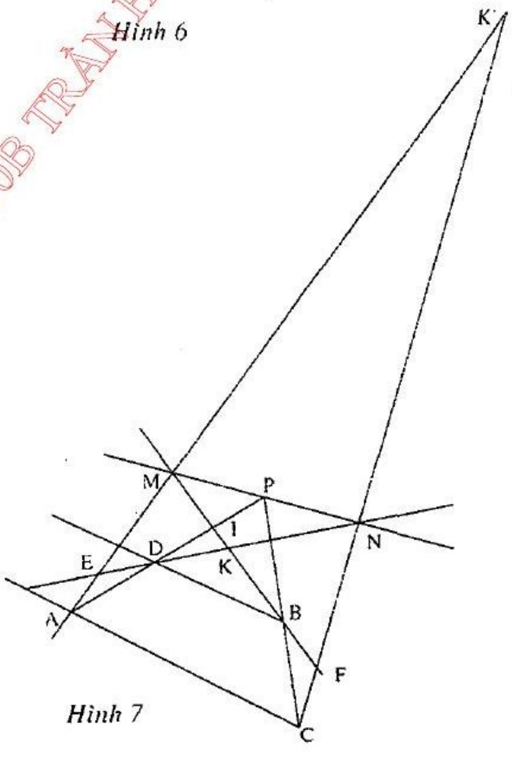
Hình 5

Trường hợp tam giác NCD nằm bên trong tam giác MAB. Cách chứng minh tương tự (H.6).



Hình 6

Trường hợp hai tam giác MAB và NCD có phần chung là tam giác KBD (K là giao điểm của MB và ND) (H.7). Gọi E là giao điểm của MA và ND ; F là giao điểm của NC và MB. Trong tam giác EMN, cát tuyến AD đi qua một điểm trong và một điểm ngoài của hai cạnh tam giác do đó AD cắt cạnh MN tại điểm P_1. Trong tam giác FMN, cát tuyến BC đi qua một điểm trong và một điểm ngoài của hai cạnh tam giác do đó BC cắt cạnh MN tại P_2. Sử dụng định lí Mê-nê-la-uýt với hai tam giác đó ta suy ra P_1 và P_2 trùng nhau.



Hình 7

Giả sử K' là giao điểm của MA và NC khi đó hoặc các điểm A và C nằm trên hai cạnh của tam giác K'MN hoặc nằm ngoài hai cạnh đó. Trong bất kì trường hợp nào cát tuyến AC cũng cắt ngoài đoạn thẳng MN. Trong tam giác KMN, cát tuyến BD cắt ngoài hai cạnh KM và KN nên cát tuyến đó cắt ngoài đoạn MN. Sử dụng định lí Mê-nê-la-uýt với hai tam giác đó ta suy ra AC và BD cắt nhau trên MN. Hạ OI vuông góc với MN và kí hiệu H_1, H_2 lần lượt là giao điểm của OI với AB và CD. Gọi J là giao điểm của ON và CD, ta có

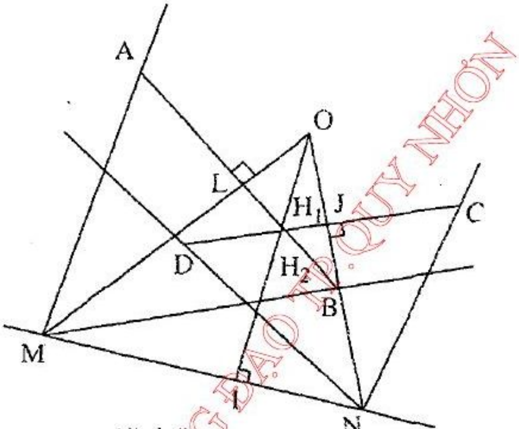
$$\overline{OI}.\overline{OH_1} = \overline{OJ}.\overline{ON} = R^2.$$

Tương tự, nếu L là giao điểm của OM và AB (H.8) thì ta có

$$\overline{OI}.\overline{OH_2} = \overline{OL}.\overline{OM} = R^2.$$

Từ các kết quả đó ta suy ra

$$\overline{OH_1} = \overline{OH_2}.$$



Hình 8

9. a) (H.9) Tiếp tuyến với đường tròn (O') tại C và D cắt nhau trên AB nên ta có

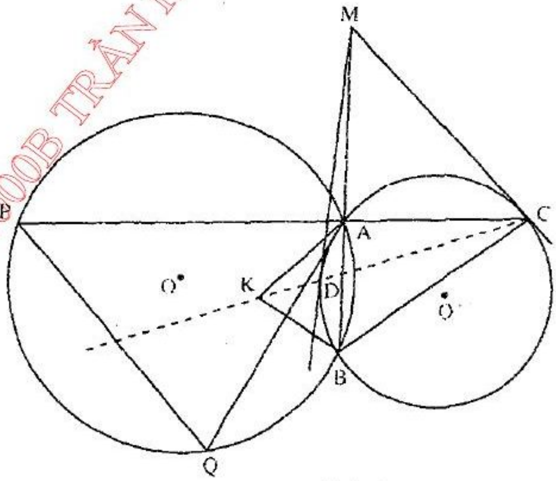
AC.BD = AD.BC. (*)

Hai tam giác BCP và BDQ đồng dạng nên ta có

$$\frac{CB}{CP} = \frac{DB}{DQ}. \qquad (**)$$

Từ các kết quả (*) và (**) ta suy ra điều cần chứng minh.

b) Sử dụng định lí Mê-nê-la-uýt cho tam giác APQ với CD là cát tuyến và sử dụng kết quả câu a), ta suy ra điều cần chứng minh.



Hình 9

c) Gọi K là giao điểm các tiếp tuyến với (O') tại A và B khi đó K là điểm cố định. Theo Bài 2, ta suy ra CD đi qua K.

10. Gọi A_1 là giao điểm thứ hai của AA' và đường tròn (O). Vì các tiếp tuyến tại B' và C' cắt nhau trên AA' nên các tiếp tuyến của (O) tại A' và A_1 cắt nhau trên B'C'. Điều đó chứng tỏ PA_1 tiếp xúc với (O). Sử dụng định lí Xêva ta chứng minh được các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

11. Kí hiệu A', C', E' tương ứng là các giao điểm của AD và CE, CF và AE, EB và AC. Các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{AE'}{E'C}\cdot\frac{CA'}{A'E}\cdot\frac{EC'}{C'A}=1.$$

Trong tam giác ABE' ta có

$$\frac{AE'}{AB}=\frac{\sin\widehat{ABE}}{\sin\widehat{AE'B}}=\frac{AE}{2R.\sin\widehat{AE'B}}$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác).

Trong tam giác CBE' ta có $\frac{CE'}{CB}=\frac{CE}{2R\sin\widehat{CE'B}}$.

Chia cả hai đẳng thức trên cho nhau ta được

$$\frac{AE'}{E'C}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AB}{BC}.$$

Lập luận tương tự ta có

$$\frac{CA'}{A'E}\cdot\frac{EA}{AC}=\frac{CD}{DE} \text{ và } \frac{EC'}{C'A}\cdot\frac{AC}{CE}=\frac{EF}{FA}.$$

Nhân cả ba đẳng thức nhận được với nhau ta suy ra

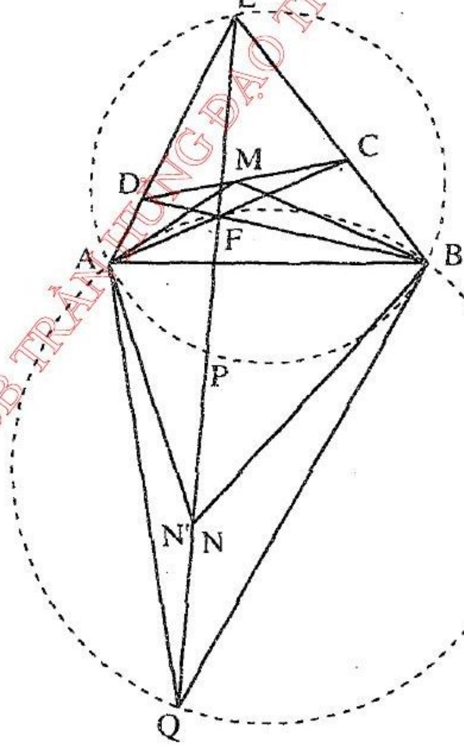
$$\frac{AE'}{E'C}\cdot\frac{CA'}{A'E}\cdot\frac{EC'}{C'A}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}.$$

Sử dụng Bài 7 ta được điều cần chứng minh.

12. a) Kí hiệu M và N là giao điểm của OC và đường tròn tâm O'. Vì $\widehat{OAO'}=\widehat{OBO'}=90^0$ nên OA và OB là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O'. Vì các tam giác OAC và OBC cân tại O suy ra AC và BC là các phân giác của các góc $\widehat{MAN}$ và $\widehat{MBN}$. Điều đó chứng tỏ P là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{MBN}$ và Q là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{MAN}$. Nghĩa là PQ đi qua tâm O' của đường tròn.

b) Nếu PQ là đường kính của đường tròn tâm O' thì $\widehat{PAQ}=90^0$. Ta có $\widehat{O'PA}=\widehat{O'AP}$ (vì tam giác O'AP cân tại O') và $\widehat{QPA}=\widehat{CBA}$ (chắn cung $\overset{\frown}{AQ}$ thuộc đường tròn tâm O'), do đó $\widehat{O'AC}=\widehat{ABC}$. Điều này chứng tỏ O'A tiếp xúc với đường tròn tâm O.

15. (H.10) Gọi P là giao của EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE ; Q là giao điểm của EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF và N' là trung điểm của đoạn PQ. Rõ ràng hai tam giác ACD và APQ đồng dạng và AM, AN là các trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó nên ta có $\dfrac{AM}{AN'}=\dfrac{CD}{PQ}$. Tương tự đối với cặp tam giác đồng dạng BCD và BPQ, ta có $\dfrac{BM}{BN'}=\dfrac{CD}{PQ}$. Từ các kết quả trên ta suy ra $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AN'}{BN'}$. Mặt khác ta có $\widehat{AMD}=\widehat{AN'P}$, $\widehat{BMC}=\widehat{BN'P}$ nên



Hình 10

$$\widehat{AMB}=180^0-\left(\widehat{AMD}+\widehat{BMC}\right)=180^0-\widehat{AN'B}.$$

Điều đó chứng tỏ N' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM và khác M. Vì các điểm M, N, N' cũng nằm trên đường tròn mà các đầu mút của đường kính là điểm chia trong và chia ngoài đoạn AB theo tỉ số $\dfrac{MA}{MB}$ do đó N trùng với N'.

17. a) Gọi S là giao điểm thứ hai của phân giác góc $\widehat{AQC}$ với đường tròn (O).

Tam giác SAC cân tại S. Trong tam giác PAC, ta có $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sin\widehat{APB}}{\sin\widehat{BPC}}$. Trong tam giác SAC, ta có

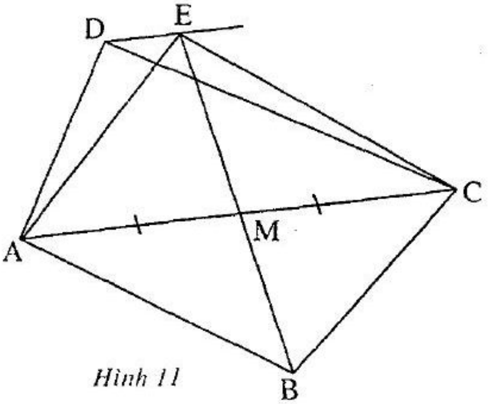
$$\frac{AR}{RC}=\frac{\sin\widehat{ASR}}{\sin\widehat{CSR}}=\frac{\sin\widehat{ACQ}}{\sin\widehat{CAQ}}.$$

Sử dụng định lí Xêva cho tam giác PAC với ba cát tuyến PQ, AQ, CQ ta suy ra $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AR^2}{CR^2}$.

18. Ta có $\widehat{MAB}=\widehat{CBD}=\widehat{CAD}$. Gọi N là giao điểm của AM với đường tròn ngoại tiếp tứ giác khác A, khi đó ta có CN // BD. Vì vậy CD = BN và BC = DN. Từ giả thiết AB.CD = AD.BC, ta suy ra AB.BN = AD.DN. Đẳng thức này chứng tỏ rằng diện tích hai tam giác ABN và AND bằng nhau. Do đó M là trung điểm của BD.

19. (H.11) Vì ACED là hình thang cân nên AD = CE và CD = AE.

Từ AB.CD = AD.BC, ta suy ra AB.AE = BC.CE. Vì M là trung điểm của AC nên diện tích của hai tam giác ABE và CBE bằng nhau.



Hình 11

Từ đẳng thức

$$AB.AE\sin\widehat{BAE}=BC.CE\sin\widehat{BCE}$$

ta suy ra $\sin\widehat{BAE}=\sin\widehat{BCE}$. Từ

$$\sin\widehat{BAE}=\sin\widehat{BCE}\text{ và }\widehat{BAE}\neq\widehat{BCE}$$

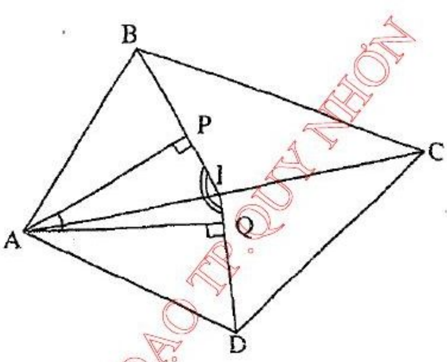
suy ra $\widehat{BAE}=\pi-\widehat{BCE}$. Điều này chứng tỏ tứ giác ABCE nội tiếp. Từ các tứ giác ACED và ABCE nội tiếp ta suy ra điều cần chứng minh.

20. (H.12) Rõ ràng DI là phân giác của góc $\widehat{ADC}$. Vì góc $\widehat{PAQ}$ nằm trong góc $\widehat{BAD}$ nên ta có

$$\widehat{BAP}+\widehat{DAQ}=\widehat{BAD}-\widehat{PAQ}$$

$$=\widehat{BAD}-\left(180^0-\widehat{BID}\right)$$

$$=90^0.$$



Hình 12

Do đó $\widehat{ADQ}+\widehat{ABP}=90^0 \Leftrightarrow \widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0$.

21. Kéo dài AM một đoạn ME về phía M sao cho ME = MC và kẻ đường trung trực của BD. Vì $\widehat{CMD}=\widehat{DMA}=\widehat{BME}$ nên đường trung trực đó là phân giác của góc $\widehat{CME}$. Tam giác MCE cân tại M nên CE vuông góc với trung trực của BD. Điều đó chứng tỏ đường trung trực của BD là trục đối xứng của hai điểm C và E. Từ đó ta có CD = BE, BC = DE, $\widehat{CDB}=\widehat{EBD}$, $\widehat{CBD}=\widehat{BDE}$ và $\widehat{ADE}\neq\widehat{ABE}$. Vì diện tích của hai tam giác ABE và ADE bằng nhau và AB.BE = AD.DE nên $\sin\widehat{ADE}=\sin\widehat{ABE}$. Từ $\widehat{ADE}\neq\widehat{ABE}$ và $\sin\widehat{ADE}=\sin\widehat{ABE}$ suy ra $\widehat{ADE}+\widehat{ABE}=\pi$. Tứ giác ABED và tứ giác BDCE nội tiếp nên tứ giác ABCD nội tiếp.

CHUYÊN ĐỀ 2

TỨ GIÁC NỘI TIẾP CÓ HAI ĐƯỜNG CHÉO VUÔNG GÓC VỚI NHAU

Các bài tập trong chuyên đề này liên quan đến tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc, các tính chất của tứ giác và điều kiện nội tiếp của một tứ giác.

BÀI TẬP

1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và hai đường chéo vuông góc với nhau tại P.

a) Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đi qua P và trung điểm của cạnh AB thì đường thẳng đó vuông góc với CD.

b) Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đi qua P và vuông góc với AB thì đường thẳng đó đi qua trung điểm của cạnh CD.

c) Chứng minh rằng tập hợp các hình chiếu của P trên các đường thẳng chứa bốn cạnh tứ giác nằm trên cùng một đường tròn và đường tròn này đi qua trung điểm 4 cạnh tứ giác.

d) Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác).

2. Cho đường tròn (O ; R) và điểm P cố định trong đường tròn cách tâm O một khoảng a. Xét tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn O có hai đường chéo vuông góc tại P.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của AC.BD ;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của AC + BD ;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $\frac{AC}{BD}$;

d) Tìm chu vi lớn nhất và nhỏ nhất của tứ giác ABCD.

3. Cho tứ giác ABCD nội tiếp có AC vuông góc với BD tại P (P khác tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD). Gọi P_1, P_2, P_3, P_4 lần lượt là hình chiếu của P trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng nếu cặp đường thẳng P_1P_2 và P_3P_4 cắt nhau tại một điểm thì điểm đó nằm trên đường thẳng AC.

4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp có AC vuông góc với BD tại P (P khác tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD). Gọi I là giao điểm các đường phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$; J là giao điểm các đường phân giác của các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$. Chứng minh rằng $\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}$.

5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có AC vuông góc với BD tại P (P khác tâm O của đường tròn (O)). Trên đường tròn (O) ta lấy hai điểm E, F sao cho BE // DF // AC. Gọi P' là giao điểm của EF và AC. Đường thẳng đi qua A song song với BD cắt BE và DF tương ứng tại các điểm B' và D'. Chứng minh rằng :

a) P là trực tâm của tam giác P'B'D' ;

b) Chân các đường cao của tam giác P'B'D' kẻ từ B' và D' nằm trên các đường đường BF và DE.

6. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại P. biết rằng đường thẳng đi qua P và trung điểm của cạnh AB vuông góc với CD. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp.

7. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại P. Chứng minh rằng :

a) Bốn trung điểm của bốn cạnh tứ giác nằm trên cùng một đường tròn và đường tròn này được kí hiệu là ω ;

b) Nếu ω đi qua hình chiếu của P trên AB thì tứ giác ABCD nội tiếp.

8. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại P. Kí hiệu P_1, P_2, P_3, P_4 lần lượt là hình chiếu của P trên AB, BC, CD, DA. Giả sử các đường thẳng P_1P_2 và P_3P_4 cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng AC. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác $P_1P_2P_3P_4$ nội tiếp ;

b) Nếu trung điểm của cạnh AB nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $P_1P_2P_3P_4$ thì tứ giác ABCD nội tiếp.

9. Cho tứ giác ABCD nội tiếp có hai đường chéo vuông góc với nhau tại P và BD đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Trên các cạnh AD và DC ta lấy lần lượt các điểm M và N sao cho BM vuông góc với AN. Chứng minh rằng BN vuông góc với CM.

10. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại P và thoả mãn điều kiện $\dfrac{AB.BC}{AD.DC} = \dfrac{BP}{DP} \neq 1$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp.

11. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O với hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P và thoả mãn đồng thời các điều kiện $PA < PC$, $PB < PD$. Chứng minh rằng :

a) Tâm O nằm trong tam giác PCD ;

b) Diện tích tứ giác OABC bằng nửa diện tích tứ giác ABCD.

12. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo vuông góc với nhau tại P (khác O). Chứng minh rằng diện tích tam giác OAB bằng diện tích tam giác OCD và diện tích tam giác OBC bằng diện tích tam giác OAD.

13. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo vuông góc với nhau tại P (khác O). Chứng minh rằng bốn trực tâm của bốn tam giác ABC, BCD, CDA, DAB lập thành đỉnh của một tứ giác nội tiếp với hai đường chéo vuông góc và tứ giác này bằng tứ giác ABCD.

14. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo vuông góc với nhau tại P (khác O). Chứng minh rằng :

$$\left|\widehat{BAC} - \widehat{BCA}\right| = \left|\widehat{DAC} - \widehat{DCA}\right|.$$

15. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo vuông góc với nhau tại P và AC là đường kính của đường tròn. Giả sử (O') là một đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại điểm M nằm trên cung $\overset{\frown}{BCD}$ sao cho từ A có thể kẻ tới đường tròn (O') các tiếp tuyến AT_1, AT_2 (T_1, T_2 là tiếp điểm) thoả mãn điều kiện $AT_1 = AB$. Chứng minh rằng (O') tiếp xúc với đường chéo BD.

16. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo cắt nhau tại P (khác O). Chứng minh rằng hai đường chéo tứ giác vuông góc khi và chỉ khi khoảng cách từ O đến AB bằng một nửa độ dài CD và khoảng cách từ O đến CD bằng một nửa độ dài AB.

17. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm P cố định cách tâm đường tròn một khoảng a (với a < R). Một góc vuông xPy có hai cạnh Px và Py cắt đường tròn đã cho tại hai điểm A, B. Tìm tập hợp trung điểm của dây AB và hình chiếu vuông góc của P trên dây này khi góc vuông xPy quay xung quanh P.

18. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo vuông góc với nhau tại P (khác O). Gọi P_1, P_2, P_3, P_4 là các hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $P_1P_2P_3P_4$ và tính bán kính r của đường tròn đó theo bán kính R của đường tròn (O) và khoảng cách OP = 2a.

19. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại P. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng nếu bốn điểm M, N, E, F nằm trên cùng một đường tròn và $\widehat{MPN} + \widehat{EPF} = 180^0$ thì tứ giác ABCD nội tiếp có hai đường chéo vuông góc.

20. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O ; R) với hai đường chéo khác đường kính của đường tròn (O). Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai đường chéo của tứ giác vuông góc với nhau là

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2.$$

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. a) Gọi M là trung điểm của cạnh AB và M' là giao điểm của PM và CD. Ta có $\widehat{CPM'} = \widehat{APM} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Kết quả đó chứng tỏ PM vuông góc với CD.

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ P xuống AB và H' là giao điểm của PH và CD. Ta có $\widehat{DPH'} = \widehat{BPH} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Điều đó chứng tỏ tam giác PDH' cân tại H' và tam giác CPH' cân tại H'.

c) Kí hiệu M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Vì tứ giác MNEF là hình chữ nhật, nên tứ giác đó nội tiếp với các đường chéo là đường kính của đường tròn. Theo kết quả của câu a) và câu b) ta suy ra rằng chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các cạnh tứ giác nhìn các đường chéo của hình chữ nhật MNEF dưới góc 90^0. Do đó chúng nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật MNEF.

d) *Cách 1*. Ta có $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2)$. Gọi I và J là trung điểm của AC và BD. Ta có

$$\overline{PA} = \overline{PI} + \overline{IA} \Rightarrow PA^2 = PI^2 + IA^2 + 2\overline{PI}.\overline{IA}.$$

Tương tự $PC^2 = PI^2 + IC^2 + 2\overline{PI}\overline{IC}$. Cộng các kết quả trên ta được $PA^2 + PC^2 = 2PI^2 + 2IA^2 + 2\overline{PI}\left(\overline{IA} + \overline{IC}\right) = 2PI^2 + \dfrac{AC^2}{2}$. Tương tự ta có

$PB^2 + PD^2 = 2PJ^2 + \dfrac{BD^2}{2}$. Vì tứ giác OIPJ là hình chữ nhật nên $PI^2 + PJ^2 = OP^2$.

Vậy $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2OP^2 + \dfrac{AC^2}{2} + \dfrac{BD^2}{2}$.

Xét $\overline{PA}.\overline{PC} = OP^2 - R^2 \Leftrightarrow PI^2 + \overline{IA}.\overline{IC} = OP^2 - R^2$

$\Rightarrow \dfrac{AC^2}{4} = PI^2 - OP^2 + R^2$.

Tương tự ta có $\dfrac{BD^2}{4} = PJ^2 - OP^2 + R^2$. Từ các kết quả đó ta được

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2OP^2 + 2(PI^2 + PJ^2 - 2OP^2 + 2R^2) = 4R^2.$$

Từ đây ta nhận được điều cần chứng minh.

Cách 2. Kẻ đường kính AE, khi đó các tam giác ADE và ACE vuông tại các đỉnh D và C. Trong tam giác vuông ADE ta có $AD^2 + DE^2 = 4R^2$ vì BD // CE nên tứ giác BDEC là hình thang cân và ta có BE = CD, BC = DE. Từ điều kiện AC ⊥ BD suy ra $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BE^2$. Từ các kết quả trên ta được $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = (AD^2 + BC^2) = 8R^2$.

2. Kí hiệu góc tạo bởi tia PO và tia PA bằng α, khi đó

$$AC = 2\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\alpha} = 2a\sqrt{k - \sin^2\alpha},$$

$$BD = 2\sqrt{R^2 - a^2\cos^2\alpha} = 2a\sqrt{k - \cos^2\alpha}\ (k > 1).$$

a) Xét tích $AC.BD = 2a\sqrt{k-\sin^2\alpha}\ 2a\sqrt{k-\cos^2\alpha} = 4a^2\sqrt{k^2 - k + \dfrac{\sin^2 2\alpha}{4}}$

Tích AC. BD lớn nhất khi $\sin 2\alpha = 1$ và AC. BD nhỏ nhất khi $\sin 2\alpha = 0$.

b) Tổng $AC + BD = 2a\sqrt{k-\sin^2\alpha} + 2a\sqrt{k-\cos^2\alpha}$

$$= 2a(\sqrt{k-\cos^2\alpha} + \sqrt{k-\sin^2\alpha})$$

Xét tổng $\sqrt{k-\cos^2\alpha} + \sqrt{k-\sin^2\alpha} \le \sqrt{2(k-1)}$. Dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan^2\alpha = 1$.

Xét $(\sqrt{k-\cos^2\alpha} + \sqrt{k-\sin^2\alpha})^2 = 2k - 1 + 2\sqrt{k^2 - k + \dfrac{\sin^2 2\alpha}{4}}$

mà $\sin^2\alpha \ge 0$. Dấu "=" xảy ra trong bất đẳng thức khi $\sin 2\alpha = 0$.

c) Ta có $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{\sqrt{k-\sin^2\alpha}}{\sqrt{k-\cos^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{k-\sin^2\alpha}{k-\cos^2\alpha}}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f = \dfrac{k-\sin^2\alpha}{k-\cos^2\alpha}$ ta được kết quả bài toán.

d) Đặt PA = x, PC = y, PB = z, PD = t bài toán được đưa về tìm min, max của biểu thức

$$\sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{x^2+t^2} + \sqrt{y^2+t^2}$$

với điều kiện $xy = zt = R^2 - a^2$.

3. Theo Bài 1, các điểm P_1, P_2, P_3, P_4 nằm trên cùng một đường tròn (được kí hiệu (O_1)). Mặt khác, bốn điểm A, C, P_2, P_1 nằm trên cùng một đường tròn (được kí hiệu (O_2)) và A, C, P_3, P_4 nằm trên cùng một đường tròn (được kí hiệu bằng (O_3)). Nếu Q là giao của P_1P_2 và P_3P_4 thì phương tích của Q đối với các đường tròn (O_2) và (O_3) bằng $\overline{QP_1}.\overline{OP_2} = \overline{QP_3}.\overline{OP_4}$. Điều đó chứng tỏ Q nằm trên trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng AC.

4. Ta thấy rằng trong tam giác ABD các đường thẳng AO và AC là hai đường đẳng giác kẻ từ A. Do đó AI là phân giác của góc $\widehat{CAO}$. Tương tự CI là phân giác của góc $\widehat{ACO}$. Vì vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAC. Do tam giác OAC cân tại O, nên OI vuông góc với AC.

Tức là OI // BD. Tương tự, ta có OJ // AC.

5. a) Nếu d là một đường kính của (O) vuông góc với AC thì d là trục đối xứng của các cặp điểm P và P'; A và C. Vì vậy $\overline{AP} = -\overline{CP'} \Rightarrow \overline{AP} = \overline{P'C}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\overline{AP}$ biến B'P' thành BC ; D'P' thành DC do đó P'B' // BC và D'P'// DC. Vì B'P đi qua trung điểm của AB và D'P đi qua trung điểm của AD, theo Bài 1 ta suy ra B'P và D'P là các đường cao của tam giác P'B'D'.

b) Gọi A' là giao điểm thứ hai của đường thẳng B'D' và đường tròn ngoại tiếp tứ giác. Phép đối xứng qua đường kính vuông góc với BD biến A thành A' và B' thành D'. Ta có $\overline{D'A'} = \overline{AB'} = \overline{PB} = \overline{P'E}$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overline{D'A'}$ biến đường thẳng D'P' thành đường thẳng A'E ; D'P thành A'B và ta có $\widehat{EA'B} = \widehat{P'D'P}$. Vì P là trực tâm tam giác P'B'D' nên $\widehat{P'B'P} = \widehat{P'D'P}$. Từ đó ta nhận được $\widehat{EA'B} = \widehat{P'B'P}$. Mặt khác. số đo các cung $\overset{\frown}{BE}$ và $\overset{\frown}{DF}$ bằng nhau nên ta có $\widehat{FBD} = \widehat{P'B'P}$. Điều đó chứng tỏ giao điểm H của BF và B'P' nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật APBB'. Tức là PH vuông góc với B'P'. Đây là điều cần chứng minh.

6. Gọi Q là trung điểm của AB và H là giao điểm của PQ và CD. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{QPA} = \widehat{HPC} = \widehat{CDB}$. Đẳng thức này chứng tỏ A và D nằm trên cùng một cung chứa góc được dựng trên dây BC.

7. a) Kí hiệu M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA khi đó ta có MN // EF // AC và MF // NE // BD. Vì vậy MNEF là hình chữ nhật. Một hình chữ nhật bao giờ cũng nội tiếp trong một đường tròn.

   b) Gọi I, K, L, H lần lượt là hình chiếu của của P trên AB, BC, CD, DA. Trong tam giác ABC ta có $\overline{BI}.\overline{BA} = \overline{BK}.\overline{BC} \Rightarrow \overline{BI}.\overline{BM} = \overline{BK}.\overline{BN}$ (*). Vì I thuộc ω và từ (*) ta suy ra K thuộc ω. Trong tam giác ABD ta có $\overline{AI}.\overline{AM} = \overline{AH}.\overline{AF}$ cùng với I thuộc ω ta suy ra H thuộc ω. Tương tự L cũng thuộc ω. Dễ dàng thấy rằng PI đi qua E và theo Bài toán 6 ta suy ra điều cần chứng minh.

8. a) Gọi M là giao điểm của P_1P_2 với P_3P_4. Từ đường tròn đi qua các điểm A, C, P_1, P_2 ta suy ra $\overline{MP_1}\,\overline{MP_2} = \overline{MA}\,\overline{MB}$ (*). Tương tự với đường tròn đi qua bốn điểm A, C, P_3, P_4, ta có $\overline{MP_3}\,\overline{MP_4} = \overline{MA}\,\overline{MB}$ (**). Từ (*) và (**) ta suy ra điều cần chứng minh.

   b) Nếu trung điểm của AB nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $P_1P_2P_3P_4$ thì các trung điểm của ba cạnh còn lại của tứ giác ABCD cũng nằm trên đường tròn này. Bằng cách lí luận như Bài 7 ta nhận được điều cần chứng minh

9. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Trong tam giác vuông ABM ta có $\overline{AB}^2 = \overline{BH}.\overline{BM}$. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ C xuống BN ta có $\overline{BC}^2 = \overline{BK}.\overline{BN}$. Vì AB = BC, nên $\overline{BH}.\overline{BM} = \overline{BK}.\overline{BN}$. Điều này chứng tỏ bốn điểm M, N, K, H nằm trên cùng một đường tròn đường kính MN. Tức là MK vuông góc với BN hay CK đi qua M. Đây là điều cần chứng minh.

10. $\dfrac{AB.BC}{AD.DC} = \dfrac{BP}{DP} \Leftrightarrow \dfrac{AB.BC}{AD.DC} = \dfrac{AB.BC\sin\widehat{ABC}}{AD.DC\sin\widehat{ADC}} \Rightarrow \sin\widehat{ABC} = \sin\widehat{ADC}$ (*). Ta coi BP < DP. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua AC, khi đó B' nằm trong tam giác ACD và ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C} > \widehat{ADC}$ (**). Từ (*) và (**) suy ra $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ADC}$ và đây là điều cần chứng minh.

11. a) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua BD, ta có A' thuộc PC và PA' < PC. Vì vậy A' nằm trong tam giác BCD và $\widehat{BA'D} > \widehat{BCD}$. Từ điều kiện $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \widehat{BA'D} + \widehat{BCD} = \pi$, ta suy ra $\widehat{BCD} < \frac{\pi}{2}$. Tương tự, ta có $\widehat{ADC} < \frac{\pi}{2}$. Trong tam giác BCD điểm P nằm trên cạnh BD nên hai góc kề với BD nhọn. Vậy BCD là tam giác có ba góc nhọn. Tương tự, tam giác ACD có ba góc nhọn. Ta biết rằng tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong tam giác khi và chỉ khi tam giác đó nhọn. Do đó O nằm đồng thời trong hai tam giác BCD và ACD nên O thuộc phần chung của hai tam giác đó. Phần chung này là tam giác vuông PCD.

b) Gọi I là trung điểm của BD, khi đó I nằm trên đoạn PD và OI // AC. Kí hiệu S là diện tích tứ giác ABCD ta có $S = \frac{AC.BD}{2} = AC.BI = 2S_{ABCI}$. Vì diện tích hai tam giác OAC và IAC bằng nhau nên diện tích của hai tứ giác ABCO và ABCI bằng nhau.

12. Ta thấy rằng OA = OB = OC = OD và $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = \pi$ nên $OA.OB.\sin\widehat{AOB} = OC.OD.\sin\widehat{COD}$. Tức là diện tích tam giác OAB bằng diện tích tam giác OCD. Tương tự, đối với cặp tam giác còn lại.

13. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Khi đó các điểm A_1 và B_1 tương ứng nằm trên AC và BD. Vì BA_1 và AB_1 cùng vuông góc với CD nên BA_1 // AB_1. Ta có $\widehat{DBA_1} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ nên tam giác ABA_1 cân tại B. Tương tự, tam giác ABB_1 cân tại A. Điều đó chứng tỏ P là tâm đối xứng của A và A_1, của B và B_1. Tương tự, P là tâm đối xứng của D và D_1, của C và C_1. Tóm lại, phép đối xứng qua P biến tứ giác ABCD thành tứ giác $A_1B_1C_1D_1$.

14. Ta biết rằng

$$\left|\widehat{BAC} - \widehat{BCA}\right| = \widehat{OBD} \text{ và } \left|\widehat{DAC} - \widehat{DCA}\right| = \widehat{ODB}.$$

Vì tam giác OBD cân tại O nên ta suy ra điều cần chứng minh.

15. Gọi N là giao điểm của AM và BD. Vì bốn điểm M, C, P, N nằm trên cùng một đường tròn nên ta có $\overline{AN}.\overline{AM} = \overline{AP}.\overline{AC}$. Trong tam giác vuông ABC ta có $\overline{AP}.\overline{AC} = AB^2$. Từ đó ta suy ra $\overline{AN}.\overline{AM} = AB^2 = AT_1^2$. Đẳng thức này chứng tỏ N nằm trên đường tròn (O') và O'N // AC. Do đó O'N vuông góc với BD tại N. Đây là điều cần chứng minh.

16. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Nếu hai đường chéo của tứ giác vuông góc thì PK // OH và PH // OK. Tứ giác OHPK là hình bình hành, do đó ta có $OH = PK = \dfrac{CD}{2}$ và $OK = PH = \dfrac{AB}{2}$. Ngược lại, nếu $OH = \dfrac{CD}{2} = CK$ và $OK = \dfrac{AB}{2} = BH$ thì hai tam giác vuông OCK và OBH bằng nhau và ta có $\widehat{COK} = \widehat{OBH}$, $\widehat{BOH} = \widehat{OCK}$. Từ đó suy ra $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = \pi$. Theo tính chất của góc có đỉnh trong đường tròn, ta suy ra $\widehat{APB} = \dfrac{\pi}{2}$.

17. Kéo dài Px và Py cắt đường tròn (O ; R) tại các điểm C và D. Gọi M là trung điểm của AB ; H là hình chiếu của P trên AB và N là trung điểm của CD. Theo Bài 1, đoạn MN là đường kính của đường tròn đi qua H. Tâm của đường tròn này là trung điểm của đoạn OP. Vì OP cố định nên trung điểm của đoạn OP cố định. Ta chứng minh rằng MN có độ dài không đổi. Thật vậy, tứ giác OMPN là hình bình hành nên ta có $2(PM^2 + PN^2) = OP^2 + MN^2$. Mặt khác, ta có $4(PM^2 + PN^2) = AB^2 + CD^2$ và $AB^2 + CD^2 = AD^2 + CD^2$. Theo Bài 1 ta suy ra $MN^2 = 2R^2 - a^2$ và bán kính đường tròn đi qua các điểm M, N, H là $r = \sqrt{2R^2 - a^2}$ không đổi. Tóm lại, tập hợp M và H nằm trên đường tròn $(I ; \sqrt{2R^2 - a^2})$ trong đó I là trung điểm của OP.

Đảo lại, với điểm M bất kì trên đường tròn đó ta dựng điểm N đối xứng với M qua I. Gọi H là giao điểm của PN với đường tròn $(I ; \sqrt{2R^2 - a^2})$. Trên MH lấy các điểm A, B sao cho MA = MB = MP. Ta cần chứng minh rằng A và B nằm trên đường tròn (O) (bạn đọc tự chứng minh). Từ đó suy ra PAB là tam giác vuông tại P.

18. Các điểm P_1, P_2, P_3, P_4 là chân các đường cao của bốn tam giác vuông tại đỉnh P nên chúng nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác AP_1PP_4 và PP_1BP_2 nội tiếp nên ta có $\widehat{PP_1P_4} = \widehat{PAP_4} = \widehat{PBP_2} = \widehat{PP_1P_2}$. Vì P_1P_2 và P_1P_4 nằm về hai phía đối với P_1P nên P_1P là phân giác của góc $\widehat{P_2P_1P_4}$. Mặt khác, các góc $\widehat{PAP_4}$ và $\widehat{PBP_2}$ là góc nhọn nên $\widehat{P_2P_1P_4} < 180^0$. Điều này chứng tỏ góc tại đỉnh P_1 của tứ giác $P_1P_2P_3P_4$ nhỏ hơn 180^0. Tương tự, các góc tại các đỉnh khác của tứ giác đó nhỏ hơn 180^0. Vì vậy $P_1P_2P_3P_4$ là một tứ giác lồi. Chứng minh tương tự ta được P_2P và P_3P là các đường phân giác của các góc tại các đỉnh P_2, P_3. Tức là P cách đều các đường thẳng chứa các cạnh tứ giác. Ta biết rằng nếu P là điểm cách đều các đường thẳng chứa các cạnh của một tứ giác lồi thì P là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác. Gọi M là trung điểm của AB và N là trung điểm của CD, khi đó MN là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $P_1P_2P_3P_4$. Trong tam giác PMN ta có $PM^2 + PN^2 = 2PI^2 + 2R^2$ (I là trung điểm của MN). Từ công thức này ta

được $PI^2 + R^2 = \dfrac{\left(R^2 - a^2\right)^2}{2r^2} \Rightarrow r = \dfrac{R^2 - a^2}{\sqrt{2\left(R^2 + a^2\right)}}$.

20. Vì O không nằm trên các đường chéo của tứ giác nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ khác $\vec{0}$. Khi đó AC vuông góc với BD tương đương với

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 - AB^2 + 2R^2 - AD^2 + 2R^2 - BC^2 + 2R^2 - CD^2 = 0.$$

Đây là điều cần chứng minh.

CHUYÊN ĐỀ 3

CÁC ĐƯỜNG ĐẲNG GIÁC TRONG MỘT GÓC

Cho $\widehat{xOy}$ *. Ta nói hai đường thẳng* d_1*,* d_2 *là các đường đẳng giác trong góc đã cho nếu chúng cùng đi qua đỉnh O và đối xứng với nhau qua phân giác của góc đó.*

BÀI TẬP

1. Giả sử A và B là các điểm nằm trong góc $\widehat{xOy}$ sao cho OA và OB là các đường đẳng giác trong góc đó.

   a) Chứng minh rằng hình chiếu của các điểm A và B trên các đường thẳng Ox và Oy nằm trên cùng một đường tròn. Tâm của đường tròn đó là trung điểm của AB.

   b) Giả sử các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 trên các tia Ox và Oy sao cho $A_1A // Oy$, $A_2A // Ox$, $B_1B // Oy$ và $B_2B // Ox$. Chứng minh rằng bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 nằm trên cùng một đường tròn.

   c) Giả sử A_1 và B_1 lần lượt là hình chiếu của A và B trên Ox và Oy. Các điểm A_2 và B_2 lần lượt trên các tia Ox và Oy thoả mãn điều kiện $A_2A // Ox$ và $B_2B // Oy$. Chứng minh rằng bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 nằm trên cùng một đường tròn. Các khẳng định trên vẫn đúng trong trường hợp A và B nằm ngoài góc $\widehat{xOy}$.

2. Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng các tiếp tuyến kẻ từ A tới đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

3. Kí hiệu K và O tương ứng là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng AK và AO là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

4. AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của các góc tam giác ABC. Kí hiệu M, N lần lượt là giao điểm của A_1C_1 và BB_1, A_1B_1 và CC_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AM và AN là đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

5. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có hai cạnh đối AD và BC không song song. Gọi P là giao điểm các đường thẳng AD và BC. Trên các đường chéo AC và BD ta lấy các điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD}$. Chứng minh rằng PM và PN là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{APB}$.

6. Cho tam giác đều ABC và các góc α, β, γ thoả mãn điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các tam giác cân BCX, CAY, ABZ sao cho BX = CX, CY = AY, AZ = BZ và

$$\widehat{BXC} = 60^0 + \frac{2\alpha}{3},\ \widehat{CYA} = 60^0 + \frac{2\beta}{3},\ \widehat{AZB} = 60^0 + \frac{2\gamma}{3}.$$

Kí hiệu P, Q, R lần lượt là giao điểm của CY và BZ, của CX và AZ, của AY và BX. Chứng minh rằng các cặp đường thẳng PB và PC, QC và QA, RA và RB là các đường đẳng giác trong ba góc tam giác PQR.

7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ; M là trung điểm của cạnh BC và P là điểm sao cho PB và PC là các tiếp tuyến của (O). Chứng minh rằng AM và AP là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

8. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, A_2 trên đường thẳng BC. Chứng minh rằng AA_1 và AA_2 là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$ khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2B}} = \frac{b^2}{c^2}.\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}.$$

9. AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của các góc tam giác ABC. Kí hiệu M là giao điểm của A_1C_1 và BB_1, N là giao điểm của A_1B_1 và CC_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BN, CM đồng quy.

10. Giả sử AD và AM lần lượt là đường cao và trung tuyến của tam giác ABC (D khác M). Chứng minh rằng nếu AD và AM là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$ thì ABC là tam giác vuông.

11. Cho $\widehat{xOy}$ và các điểm A, B nằm trong góc. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của các điểm đó trên hai cạnh của góc đã cho phân biệt và nằm trên cùng một đường tròn thì OA và OB là các đường đẳng giác trong góc đã cho.

12. Cho $\widehat{xOy}$ và các điểm A, B nằm trong góc. Xét các điểm A_x, A_y, B_x, B_y phân biệt và nằm trên các cạnh của góc sao cho các tứ giác OA_xAA_y và OB_xBB_y là hình bình hành. Chứng minh rằng nếu bốn điểm A_x, A_y, B_x, B_y nằm trên cùng một đường tròn thì OA và OB là các đường đẳng giác trong góc đã cho.

13. Cho $\widehat{xOy}$ và các điểm A, B nằm trong góc. Xét các điểm A_x, A_y, B_x, B_y nằm trên các cạnh của góc sao cho A_xA // Oy, B_yB // Ox. $A_yA \perp Oy$, $B_xB \perp Ox$. Chứng minh rằng nếu các điểm A_x, A_y, B_x, B_y nằm trên cùng một đường tròn thì OA và OB là các đường đẳng giác trong góc đã cho.

14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm sao cho PB và PC là các tiếp tuyến với đường tròn. Trên cạnh BC ta lấy điểm M. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC khi và chỉ khi AP và AM là các đường đẳng giác của góc tạo bởi AB và AC.

15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm sao cho PB và PC là các tiếp tuyến với đường tròn (O). Trên AB và AC ta lấy các điểm K và H sao cho PK // AC và PH // AB. Chứng minh rằng các điểm K, H cùng với trung điểm các cạnh AB và AC nằm trên cùng một đường tròn.

16. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Kí hiệu M, N lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng :

a) Hình chiếu của các điểm M và N trên các cạnh AB và CD nằm trên cùng một đường tròn ;

b) Tập hợp tất cả các hình chiếu của M và N trên bốn cạnh tứ giác nằm trên cùng một đường tròn khi và chỉ khi

$$AB.CD = AD.BC.$$

17. BH, BD lần lượt là đường cao, đường phân giác kẻ từ B của tam giác ABC ; M, N lần lượt là trung điểm của AC và BH. Điểm K là giao của MN với BD và L là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AK và AL là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

18. Trong một tứ giác lồi ABCD, đường chéo BD không phải là phân giác của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$. Điểm P nằm trong tứ giác sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{CBP}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{CDP}$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp khi và chỉ khi PA = PC.

(Đề thi Ôlimpic Toán quốc tế năm 2004).

19. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Các điểm A_2, B_2, C_2 nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC sao cho A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 là các tiếp tuyến với đường tròn, khác các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 cắt nhau tại một điểm và điểm này nằm trên đường thẳng đi qua tâm các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đó.

20. AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác nhọn ABC. Kí hiệu A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AA_1 và B_1C_1, BB_1 và A_1C_1, CC_1 và A_1B_1. Kí hiệu ω_1 là đường tròn tâm A tiếp xúc với B_1C_1 và A_2A_3 là tiếp tuyến với ω_1 khác B_1C_1. Đường tròn ω_2 tâm B tiếp xúc với A_1C_1 và B_2B_3 là tiếp tuyến với ω_2 khác A_1C_1. Đường tròn ω_3 tâm C tiếp xúc với A_1B_1 và C_2C_3 là tiếp tuyến với ω_3 khác A_1B_1 (A_3, B_3, C_3 là các tiếp điểm). Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3 và C_1C_3 cắt nhau tại một điểm.

21. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong mặt phẳng chứa tam giác đó. Phép đối xứng qua phân giác góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ biến AM, BM và CM thành các đường thẳng x, y, z.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng x, y, z cắt nhau tại một điểm M'.

b) Kí hiệu A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lần lượt trên BC, CA, AB và A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của M' trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng sáu điểm A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 nằm trên cùng một đường tròn.

Chú ý rằng nếu M là trực tâm tam giác ABC thì M' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và sáu điểm đó nằm trên đường tròn Ole của tam giác ABC.

22. Cho tam giác ABC. Trên đường thẳng BC ta lấy các điểm A_1, A_2 sao cho AA_1 và AA_2 là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và AA_1A_2 tiếp xúc với nhau.

23. Cho tam giác ABC và các điểm M, N trên đường thẳng BC sao cho AM và AN là các đường đẳng giác trong góc BAC. Trên AM ta lấy điểm N_1 ; trên AN lấy điểm M_1 sao cho MM_1 // AB và NN_1 // AC. Các đường thẳng MM_1 và NN_1 cắt nhau tại K. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMM_1 và ANN_1 cắt nhau lần thứ hai tại L. Chứng minh rằng đường thẳng KL đi qua A.

24. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M là trung điểm của đường chéo BD. Chứng minh rằng nếu $\widehat{MAD} = \widehat{CAB}$ và $\widehat{MCD} = \widehat{ACB}$ thì tứ giác ABCD nội tiếp.

25. Trên các cạnh BC, CA, AB ta lấy các điểm tương ứng A_1, B_1, C_1 sao cho $\widehat{AB_1C_1} = \hat{B}$, $\widehat{BC_1A_1} = \hat{C}$, $\widehat{CA_1B_1} = \hat{A}$. Ký hiệu O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AO_1, BO_2, CO_3 đồng quy.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. a) Kí hiệu $\alpha = \widehat{xOA}$ và $\beta = \widehat{yOA}$, khi đó $\widehat{yOB} = \alpha$ và $\widehat{xOB} = \beta$. Nếu A_1 và A_2 là hình chiếu vuông góc của A trên Ox và Oy thì $\overline{OA_1} = OA.\cos\alpha$, $\overline{OA_2} = OA.\cos\beta$. Nếu B_1 và B_2 là hình chiếu vuông góc của B trên Ox và Oy thì $\overline{OB_1} = OB.\cos\beta$, $\overline{OB_2} = OB.\cos\alpha$. Từ các kết quả trên ta suy ra $\overline{OA_1}.\overline{OB_1} = \overline{OA_2}.\overline{OB_2}$. Đẳng thức đó chứng tỏ A_1, A_2, B_1, B_2 nằm trên cùng một đường tròn.

b) Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 nằm trên hai cạnh của góc $\widehat{xOy}$ nên chúng là đỉnh của một tứ giác lồi. Từ các cặp tam giác đồng dạng OAA_1 và OBB_2, OAA_2 và OBB_1 ta suy ra $\dfrac{OA_1}{OB_2} = \dfrac{OA_2}{OB_1} = \dfrac{OA}{OB}$. Đẳng thức này chứng tỏ hai tam giác OA_1B_2 và OA_2B_1 đồng dạng và $\widehat{OB_1A_2} = \widehat{OB_2A_1}$. Vì $\widehat{OB_1A_2}$ là góc ngoài của tứ giác $A_1A_2B_2B_1$ nên tứ giác đó nội tiếp.

c) Sử dụng lại kí hiệu góc của phần a) ta có :

$$\overline{OA_1} = OA.\cos\alpha,\ \ \overline{OB_1} = OB.\cos\alpha.$$

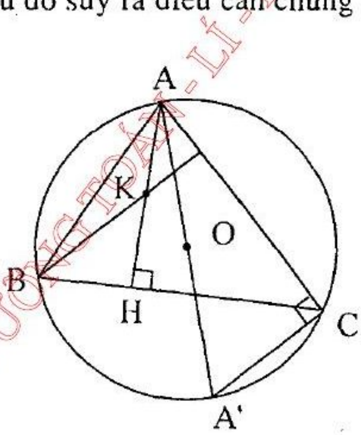
Từ đó ta suy ra $\overline{OA_1}.\overline{OB_2}$ và $\overline{OA_2}.\overline{OB_1}$ cùng dấu. Từ các cặp tam giác đồng dạng OA_1A và OB_1B, OA_2A và OB_2B, ta suy ra

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} \Rightarrow OA_1.OB_2 = OA_2.OB_1.$$

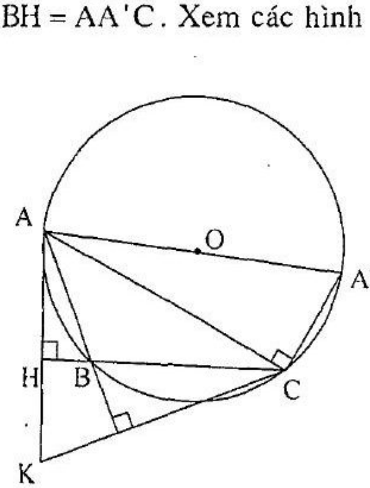
Từ các kết quả trên ta suy ra $\overline{OA_1}.\overline{OB_2} = \overline{OA_2}.\overline{OB_1}$.

2. Hãy chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC nằm trên phân giác của $\widehat{BAC}$.

3. Kéo dài AO cắt đường tròn tại A', AK cắt BC tại H. Các tam giác ABH và AA'C tương ứng vuông tại H và C có $\widehat{ABH} = \widehat{AA'C}$. Xem các hình 13 và 14. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.



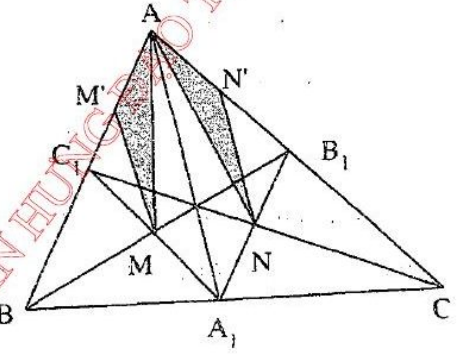
Hình 13



Hình 14

4. (H.15) Rõ ràng AM và AN nằm khác phía đối với đường phân giác AA_1. Ta cầnchứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$. Lấy trên AB và AC các điểm M' và N' sao cho MM' // NN' // AA_1. Ta cần chứng minh rằng $\frac{AM'}{MM'} = \frac{AN'}{NN'}$. Ta có

$$\frac{AM'}{AC_1} = \frac{A_1M}{A_1C_1} \text{ và } \frac{MM'}{AA_1} = \frac{C_1M}{A_1C_1}.$$



Hình 15

Từ đó ta suy ra

$$\frac{AM'}{MM'} \cdot \frac{AA_1}{AC_1} = \frac{A_1M}{C_1M}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM'}{MM'} = \frac{A_1M}{MC_1} \frac{AC_1}{AA_1}.$$

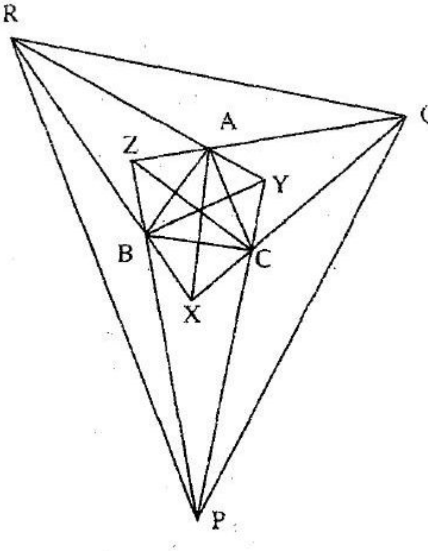
Tương tự ta có $\frac{AN'}{NN'} = \frac{A_1N}{NB_1} \cdot \frac{AB_1}{AA_1}$.

Hiển nhiên

$$\frac{A_1M}{MC_1} \frac{AC_1}{AA_1} = \frac{A_1N}{NB_1} \cdot \frac{AB_1}{AA_1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{A_1B}{BC_1} AC_1 = \frac{A_1C}{CB_1} . AB_1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} . A_1B = \frac{c}{a} . A_1C.$$

Điều này luôn đúng.



Hình 16

6. (H.16) Rõ ràng AX, BY, CZ tương ứng là các đường phân giác của các góc $\widehat{QXR}$, $\widehat{PYR}$, $\widehat{PZQ}$. Ta có

$$\widehat{BAZ} = 60^0 - \frac{\gamma}{3}, \ \widehat{CAY} = 60^0 - \frac{\beta}{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{QAR} = \widehat{YAZ} = 60^0 - \frac{\gamma}{3} + 60^0 - \frac{\beta}{3} + 60^0$$

$$\widehat{QAR} = 120^0 + \frac{\alpha}{3} = 90^0 + 30^0 + \frac{\alpha}{3} = 90^0 + \frac{1}{2}\left(60^0 + \frac{2\alpha}{3}\right) = 90^0 + \frac{\widehat{QXR}}{2}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XQR. Tương tự B là tâm đường tròn nội tiếp tam giác YPR và C là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ZPQ. Từ các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

8. Nếu AA_1 và AA_2 là các đường đẳng giác thì các tia AA_1 và AA_2, hoặc cùng nằm trong góc BAC hoặc cùng nằm ngoài góc đó. Nghĩa là các điểm A_1, A_2 nằm trên cạnh BC hoặc các điểm B, C nằm trên đoạn A_1A_2. Điều đó tương dương với $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2B}} > 0$. Ta xét trường hợp A_1, A_2 nằm trên cạnh BC. Kí hiệu $\alpha = \widehat{BAA_1}$, theo định lí hàm sin đối với tam ABA_1 ta có

$$\frac{BA_1}{\sin\alpha} = \frac{AA_1}{\sin B}. \tag{1}$$

Tương tự như vậy đối với tam ACA_1 ta có

$$\frac{CA_1}{\sin(A-\alpha)} = \frac{AA_1}{\sin C}. \tag{2}$$

Từ (1), (2) ta được

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}.\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}.\frac{c}{b}. \tag{3}$$

Sử dụng định lí hàm số sin đối với các tam giác ACA_2 và ABA_2 ta có

$$\frac{CA_2}{\sin\alpha} = \frac{AA_2}{\sin C},\ \frac{BA_2}{\sin(A-\alpha)} = \frac{AA_2}{\sin B}.$$

Vì vậy $\frac{CA_2}{A_2B} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}.\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}.\frac{b}{c}$. (4)

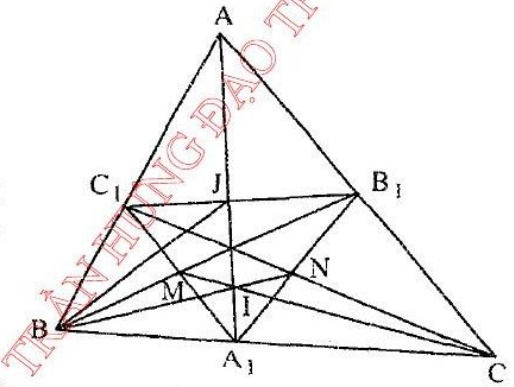
Kết hợp (3), (4) và $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2B}} > 0$, ta suy ra điều cần chứng minh.

Đảo lại, nếu A_1 và A_2 trên BC sao cho $\frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2B}} = \frac{b^2}{c^2}.\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}$, ta chứng minh rằng AA_1 và AA_2 là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$. Nếu AA_1 và AA_3 là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$ thì ta có $\frac{\overline{CA_3}}{\overline{A_3B}} = \frac{b^2}{c^2}.\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}$.

Vì vậy $\frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2B}} = \frac{\overline{CA_3}}{\overline{A_3B}} \Leftrightarrow \overline{BA_2} = \overline{BA_3}$, nghĩa là A_2 và A_3 trùng nhau.

Trường hợp B, C nằm trên đoạn A_1A_2, chứng minh tương tự.

9. (H.17) Gọi J là giao điểm của AA_1 và B_1C_1 ; I là giao điểm của AA_1 và BN. Theo Bài 4, các đường thẳng BI và BJ là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{ABC}$. Sử dụng Bài 8 đối với tam giác ABA_1 ta có $\frac{\overline{A_1I}}{\overline{IA}} = \frac{BA_1^2}{BA^2} \cdot \frac{\overline{AJ}}{\overline{JA_1}}$. Tương tự, gọi I' là giao điểm của CM và AA_1 trong tam giác ACA_1 ta có $\frac{\overline{A_1I'}}{\overline{I'A}} = \frac{A_1C^2}{CA^2} \cdot \frac{\overline{AJ}}{\overline{JA_1}}$. Vì AA_1 là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nên $\frac{A_1B}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$. Từ kết quả trên ta suy ra $\frac{\overline{A_1I}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{A_1I'}}{\overline{I'A}}$. Nghĩa là hai điểm I và I' trùng nhau.



Hình 17

10. Ta biết rằng đường thẳng đối xứng với AD qua phân giác của góc $\widehat{BAC}$ đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (Bài 3). Vì vậy M phải thuộc đường thẳng đó. Nếu M và O khác nhau thì AM vuông góc với BC. Nghĩa là AM trùng với AD trái với giả thiết. Vì vậy M trùng với O.

11. Ký hiệu A_x, A_y lần lượt là hình chiếu của A trên Ox và Oy : B_x, B_y lần lượt là hình chiếu của B trên Ox và Oy. Từ các tứ giác nội tiếp OA_xAA_y và OB_xBB_y, ta suy ra $\widehat{AOA_x} = \widehat{AA_yA_x}$, $\widehat{BOB_y} = \widehat{BB_xB_y}$. Từ tứ giác nội tiếp $A_xB_xB_yA_y$ ta suy ra $\widehat{OA_yA_x} = \widehat{OB_xB_y}$.

Vì $\widehat{OA_yA_x} + \widehat{AA_yA_x} = \widehat{OB_xB_y} + \widehat{BB_xB_y} = 90^0$ nên $\widehat{AA_yA_x} = \widehat{BB_xB_y}$. Đây là điều cần chứng minh.

12. Từ giả thiết ta suy ra hai tam giác OA_xA và OB_yB đồng dạng nên $\widehat{AOA_x} = \widehat{BOB_y}$.

14. Xét trường hợp P và A khác phía với BC. Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với AP. Trong tứ giác ABQC các phân giác của hai góc tại đỉnh B và C đi qua một điểm trên AQ, nên ta có AB.CQ = BQ.AC. Chọn điểm N trên đường tròn sao cho QN // BC, khi đó CN = BQ, BN = CQ. Vì vậy AP và AN là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$. Rõ ràng AN đi qua trung điểm của BC khi và chỉ khi diện tích các tam giác ABN bằng diện tích tam giác ACN tức là AB.BN = AC.CN hay AB.CQ = AC.BQ.

15. Kí hiệu M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Theo Bài 14 các đường thẳng AM và AP là đẳng giác. Vì ME // AC và MN // AB theo Bài 1 ta suy ra điều phải chứng minh.

16. a) Nếu AB cắt CD tại P thì theo Bài 5, PM và PN là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{APB}$. Theo Bài 1 ta suy ra điều cần chứng minh.

b) Ta cần chứng minh kết luận của bài toán đối với hình chiếu của M và N trên hai cạnh AB và BC. Nếu các hình chiếu đó nằm trên cùng một đường tròn thì BD và BM là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{ABC}$. Gọi E là giao điểm của BM với đường tròn ngoại tiếp tứ giác, ta có CE = AD và AE = CD. Vì M là trung điểm của AC do đó diện tích hai tam giác ABE và CBE bằng nhau. Vì vậy AE.AB = BC.CE. Đảo lại, nếu AB.CD = AD.BC và E là điểm trên đường tròn sao cho DE // AC, ta cần chứng minh ba điểm B, M, E thẳng hàng.

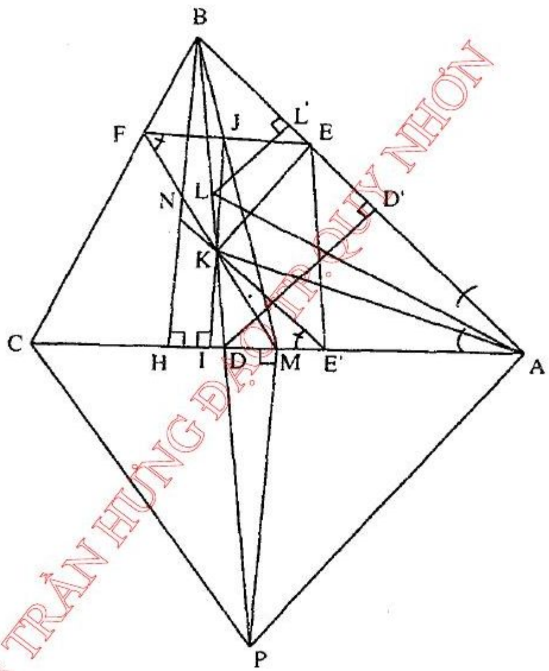
Ta có AB.CD = AD. BC $\Leftrightarrow$ AB.AE = BC.CE, vì AD = CE, CD = AE. Mặt khác, $\sin\widehat{BAE} = \sin\widehat{BCE}$ nên

$$AB.AE\sin\widehat{BAE} = BC.CE\sin\widehat{BCE} \Leftrightarrow S_{ABE} = S_{CBE}.$$

Do đó BE phải đi qua trung điểm của AC.

17. (H.18) Gọi P là giao điểm của BD và trung trực của AC, khi đó P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng song song với BH đi qua K cắt AC và BM tương ứng tại I và J. Đường thẳng song song với AC và đi qua J cắt AB và CB tương ứng tại E và F. Ta thấy rằng phép vị tự tâm B biến P thành K khi đó M thành J. C thành F và A thành E. Kí hiệu E' là giao điểm của FK và AC. Vì vậy tam giác cân PAC đồng dạng với tam giác KEF. Từ đó ta suy ra

$$\widehat{KE'I} = \widehat{KFJ} = \widehat{PCA} = \frac{\widehat{B}}{2}.$$



Hình 18

Vì N là trung điểm của BH nên K là trung điểm của IJ. Hai tam giác vuông KFJ và KE'I bằng nhau nên IE' = JF.

Trong tam giác vuông KAI ta có

$$\cot\widehat{KAI} = \frac{AI}{KI} = \frac{MI}{KI} + \frac{MA}{KI}$$

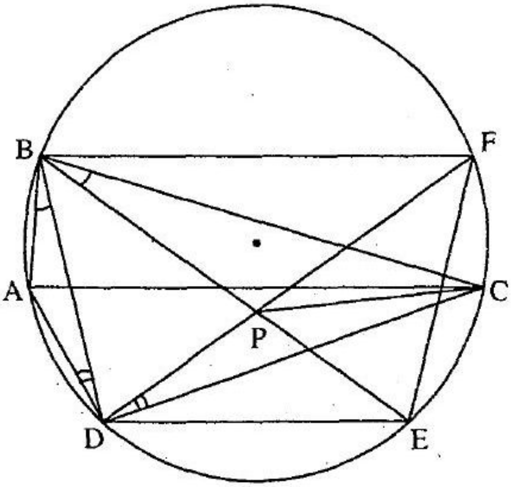
$$= \frac{FJ}{KJ} + 2\frac{AE'}{EE'} = \cot\frac{\widehat{B}}{2} + 2\cot A.$$

Gọi L' và D' lần lượt là hình chiếu của L và D trên AB, khi đó L'B = L'D'. Trong tam giác vuông LAL' ta có

$$\cot\widehat{LAL'} = \frac{AL'}{LL'} = \frac{L'D'}{LL'} + \frac{AD'}{LL'} = \frac{BL'}{LL'} + 2\frac{AD'}{DD'} = \cot\frac{\widehat{B}}{2} + 2\cot A.$$

Từ các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

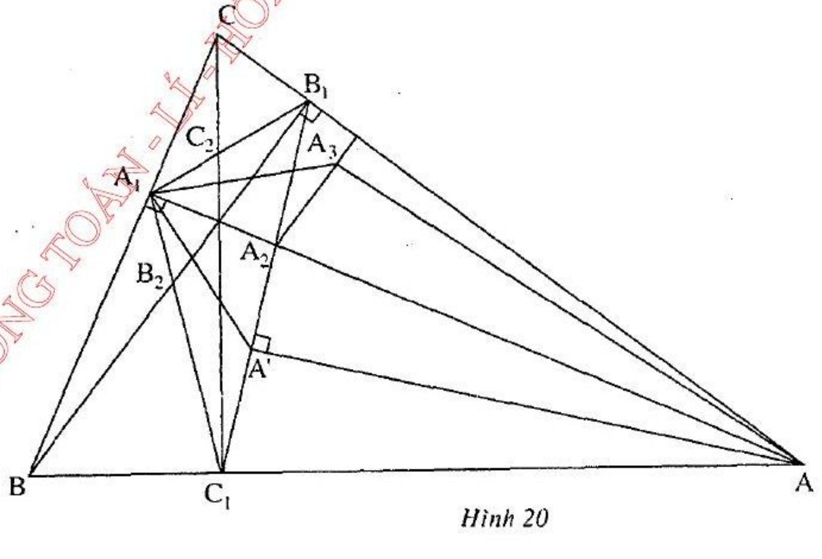
18. (H.19) Nếu ABCD nội tiếp và BP cắt đường tròn ngoại tiếp nó lần thứ hai tại E thì DE // AC. Tương tự, DP cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác lần thứ hai tại F, ta có BF // AC. Từ đó tứ giác BDEF là một hình thang cân hoặc một hình chữ nhật. Nghĩa là P nằm trên đường kính của đường tròn vuông góc với AC.



Hình 19

19. Kí hiệu A', B', C' lần lượt là tiếp điểm của BC, CA. AB với đường tròn tâm I, ta thấy rằng A' đối xứng với A_2 qua AI. Theo giả thiết AB đối xứng với AC qua AI. Vì vậy AA' và AA_2 là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$. Tương tự các đường thẳng BB' và BB_2, CC' và CC_2 là các đường đẳng giác trong các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$. Ta chứng minh được rằng AA', BB', CC' đồng quy. Sử dụng bài 8 ta suy ra điều cần chứng minh. Để ý rằng $A'A_2$ và $B'C'$ cùng vuông góc với AI nên $A'A_2 // B'C'$. Vì vậy $A'B' = C'A_2$. Tương tự ta có $A'B' = C'B_2$. Từ các kết quả đó ta suy ra tam giác $C'A_2B_2$ cân tại C' và $A_2B_2 // AB$. Các tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ có các cạnh song song nên tồn tại một phép vị tự biến tam giác này thành tam giác kia. Một trong các phép vị tự đó có tâm trùng với giao điểm các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2. Phép vị tự đó biến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$.

20. (H.20) Trong tam giác $A_1B_1C_1$, các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác. Đường tròn (ω_1) là đường tròn bàng tiếp của tam giác $A_1B_1C_1$. Nếu A' là tiếp điểm của (ω_1) với B_1C_1 thì các đường thẳng A_1A' và A_1A_3 là các đường đẳng giác thuộc góc $B_1A_1C_1$ của tam giác $A_1B_1C_1$. Tương tự nếu B', C' lần lượt là tiếp điểm của (ω_1), với A_1C_1, A_1B_1 thì B_1B' và B_1B_3, C_1C' và C_1C_3 là các cặp đường thẳng đẳng giác trong các góc tương ứng của tam giác $A_1B_1C_1$. Hãy chứng minh rằng A_1A', B_1B', C_1C' đồng quy và sử dụng lại Bài 8 ta suy ra điều cần chứng minh.



Hình 20

21. a) Sử dụng kết quả Bài 8 ; b) Sử dụng kết quả phần a) bài 1.

22. Trường hợp A_1 và A_2 trên cạnh BC và coi A_2 nằm trên đoạn A_1C. Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A. Ta có

$$\widehat{BA_2A}=\hat{C}+\widehat{A_2AC}=\hat{C}+\widehat{BAA_1}=\widehat{BAx}+\widehat{BAA_1}=\widehat{A_1Ax}.$$

Trường hợp A_1 và A_2 nằm trên phần kéo dài của BC về hai phía với B và C được chứng minh tương tự.

23. Từ điều kiện bài toán ta suy ra các điểm M và N cùng nhìn đoạn M_1N_1 dưới các góc có số đo bằng nhau. Vì vậy tứ giác MNN_1M_1 nội tiếp và K có cùng phương tích với hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BMM_1 và CNN_1.

24. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD và gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn này với CM, CD. Ta có hai tam giác ABC và CMF đồng dạng nên $\frac{BC}{CA}=\frac{CM}{CF}$. Các tam giác BCM và ACF đồng dạng nên $\frac{BC}{CA}=\frac{CM}{CF}=\frac{BM}{AF}$ (*). Hai ta giác CMD và CEF đồng dạng nên $\frac{MD}{EF}=\frac{CM}{CF}$ (**). Từ (*) và (**) ta suy ra AF = EF và $\widehat{AEF}=\widehat{EAF}$. Mặt khác, $\widehat{EMF}=\widehat{EAF}$ và $\widehat{ADC}=\widehat{AEF}$ vì vậy

$$\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=\widehat{CMF}+\widehat{AEF}=\widehat{CME}+\widehat{EAF}=\widehat{CME}+\widehat{EMF}=180^0.$$

25. Các tam giác ABC và AB_1C_1 đồng dạng. Phép đối xứng qua phân giác của góc $\widehat{BAC}$ biến tam giác AB_1C_1 thành tam giác $AB_1'C_1'$ vị tự với tam giác ABC, do đó O_1 nằm trên đường thẳng AO (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Điều đó chứng tỏ AO và AO_1 là các đường đẳng giác thuộc góc $\widehat{BAC}$. Ta biết rằng đường đẳng giác với AO là đường cao của tam giác kẻ từ A. Bởi vậy O_1 nằm trên đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

CHUYÊN ĐỀ 4

ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG TRONG TAM GIÁC

Cho tam giác ABC. *Đường thẳng đối xứng với trung tuyến* AM *qua phân giác của góc* $\widehat{BAC}$ *được gọi là đường đối trung thuộc góc* $\widehat{BAC}$ *của tam giác* ABC.

BÀI TẬP

1. Giả sử đường đối trung thuộc góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần thứ hai tại K. Chứng minh rằng các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau trên AK.

2. Giả sử AK là đường đối trung thuộc góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC và P là một điểm thuộc đoạn AK. Kí hiệu AB = c, AC = b ; y và z lần lượt là các khoảng cách từ P tới AC và AB. Chứng minh $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

3. Tam giác ABC có các cạnh AB = c, BC = a, AC = b và diện tích S.

   a) Chứng minh rằng ba đường đối trung trong ba góc của tam giác ABC cắt nhau tại một điểm. Điểm này được gọi là điểm Lemoin của tam giác tương ứng và được kí hiệu bằng L.

   b) Kí hiệu x, y, z lần lượt là khoảng cách từ L đến các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$.

4. K là giao điểm của BC và đường đối trung thuộc $\widehat{BAC}$; M là trung điểm của BC. Trên cung $\overset{\frown}{AK}$ và $\overset{\frown}{AM}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKM ta lấy các điểm P và Q sao cho BP và CQ tiếp xúc với đường tròn đó.

Chứng minh rằng nếu $\widehat{ABP} = \widehat{ACQ}$, thì các đường thẳng AP và AQ là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

5. Kí hiệu K là giao điểm của BC và đường đối trung thuộc góc $\widehat{BAC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC cắt AB tại P và đường tròn ngoại tiếp tam giác AKB cắt AC tại Q. Chứng minh rằng KP = KQ.

6. Kí hiệu K là giao điểm của BC và đường đối trung thuộc góc $\widehat{BAC}$. Giả sử đường thẳng AK cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại P. Hình chiếu của P trên AB, BC, CA lần lượt được kí hiệu là E, Q, F. Chứng minh rằng QE = QF.

7. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ta lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho DE // AB và DF // AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt lại các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D_1, E_1, F_1. Kí hiệu M là giao điểm của DE và D_1F_1 ; N là giao của DF và D_1E_1. Chứng minh rằng các điểm M và N nằm trên đường đối trung của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A.

8. Gọi D là điểm trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho AD là đường đối trung thuộc góc $\widehat{BAC}$. Các điểm E. F lần lượt nằm trên các đường thẳng CA, AB sao cho DE // AB và DF // AC.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF tiếp xúc với BC. (Đường tròn này được gọi là đường tròn Túcke).

b) Chứng minh rằng nếu AB và AC cắt đường tròn Túcke lần thứ hai tại E' và F' thì E'F' // BC.

9. Kí hiệu M và N là trung điểm các đường chéo AC và BD của tứ giác nội tiếp ABCD. Chứng minh rằng tập hợp các hình chiếu của M và N trên cạnh tứ giác nằm trên cùng một đường tròn khi và chỉ khi các phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ đi qua một điểm trên BD.

10. Kí hiệu x, y, z lần lượt là khoảng cách từ một điểm M nằm trong tam giác ABC đến BC, CA, AB. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất khi M trùng với L.

11. Giả sử tam giác $A_1B_1C_1$ được lập bởi các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại các đỉnh A, B, C (A thuộc cạnh B_1C_1 ; B thuộc cạnh A_1C_1 ; C thuộc cạnh A_1B_1). Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại điểm L.

12. Hình chiếu của điểm L tương ứng trên BC, CA, AB được kí hiệu bởi L_a, L_b, L_c. Chứng minh rằng đường thẳng LL_a đi qua trung điểm của đoạn thẳng L_bL_c.

13. Giả sử P và Q lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và AC sao cho LP // AC và LQ // AB. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, P, Q nằm trên cùng một đường tròn.

14. Giả sử tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A cắt CL tại J và AB cắt CL tại I. Chứng minh rằng $\frac{LC}{LI} = \frac{JC}{JI}$ và BJ là tiếp tuyến với đường tròn.

15. Cho tam giác ABC. Kí hiệu M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng đường thẳng ML đi qua trung điểm của đường cao kẻ từ A.

16. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1.

a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại một điểm M.

b) Kí hiệu S_1, S_2, S_3 tương ứng là diện tích các tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng $S_1 : S_2 : S_3 = a^2 : b^2 : c^2$ (a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB).

c) Gọi M_1, M_2, M_3, là hình chiếu của M tương ứng trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} = \vec{0}$.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Nếu BC là đường kính của đường tròn thì các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn đó song song với nhau. Giả sử BC không là đường kính. Hãy chứng minh rằng AB.CK = AC.BK. Muốn vậy gọi L là giao điểm thứ hai của trung tuyến kẻ từ A với đường tròn ngoại tiếp, khi đó ta có BK = CL và

BL = CK. Vì các tam giác ABL và ACL có diện tích bằng nhau nên AB.BL = AC.CL.

2. Gọi P' là điểm đối xứng với P qua phân giác góc $\widehat{BAC}$, khi đó P' nằm trên trung tuyến AM. Vì diện tích các tam giác P'AB và P'AC bằng nhau nên ta có $z.AC = y.AB \Rightarrow \frac{y}{AC} = \frac{z}{AB}$.

3. a) Kí hiệu K là giao điểm của BC và đường đối trung trong góc $\widehat{BAC}$. Ta chứng minh được rằng $\frac{KB}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ và dựa vào kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

   b) L nằm trên đường đối trung, sử dụng Bài 2. Nếu h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C thì ta có

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1. \qquad (*)$$

   Đặt $\lambda = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ và thay nó vào (*) ta được

$$\lambda\left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}\right) = 1 \Rightarrow \lambda\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

4. Ta có $BP^2 = BK.BM$ và $BQ^2 = CK.CM$. Do đó $\frac{BP^2}{CQ^2} = \frac{BK}{CK} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Hai tam giác ABP và ACQ đồng dạng nên ta suy ra điều cần chứng minh.

5. Từ $\widehat{BAC} = \widehat{BKP}$, ta suy ra tam giác BKP đồng dạng với tam giác BAC và

$$\frac{KP}{BK} = \frac{AC}{AB}. \qquad (1)$$

   Tương tự ta có

$$\frac{KQ}{CK} = \frac{AB}{AC}. \qquad (2)$$

   Chia (1) cho (2) ta được

$$\frac{KP}{KQ}.\frac{CK}{BK} = \frac{AC^2}{AB^2}. \qquad (3)$$

   Chú ý rằng $\frac{KB}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ thay kết quả này vào (3) ta suy ra KP = KQ.

6. Tứ giác PQBE nội tiếp nên $\widehat{EPQ} = \widehat{ABC}$. Theo định lí hàm số sin trong tam giác EPQ, ta có $EQ = BP \sin B = BP.\frac{AC}{2R}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Lí luận tương tự trong tam giác FPQ, ta có $FQ = CP.\sin C = CP.\frac{AB}{2R}$. Vì AB.PC = AC.PB suy ra điều cần chứng minh.

7. Tứ giác DEF_1F là một hình thang cân có $DF = EF_1$. Vì AEDF là hình bình hành nên DE = AE. Từ đó ta suy ra $F_1E = AE$ và $\widehat{FDE} = \widehat{F_1ED} = \widehat{EF_1A} = \widehat{A}$. Ta có $\widehat{EF_1D_1} = \widehat{D_1DM} = \widehat{B}$ vì vậy tam giác ABC đồng dạng với tam giác MEF_1 và $\frac{EF_1}{AB} = \frac{AE}{AB} = \frac{ME}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{ME} = \frac{AB}{AC}$. Gọi A_1 là trung điểm của BC và C_1 đối xứng với A qua A_1. Rõ ràng tam giác ABC_1 đồng dạng với tam giác AME nên $\widehat{EAM} = \widehat{BAA_1}$. Điều đó chứng tỏ rằng M nằm trên đường đối trung kẻ từ A. Lập luận tương tự, ta suy ra N nằm trên đường đối trung kẻ từ A.

8. a) Xét tỉ số

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AC}\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{BC}\frac{AC}{AB} \qquad (1)$$

và tỉ số

$$\frac{AF}{AC} = \frac{CD}{BC}\frac{AB}{AC}. \qquad (2)$$

Do AD là đường đối trung nên

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC và $\widehat{EDC} = \widehat{B} = \widehat{AEF} = \widehat{DFE}$.

b) Bạn đọc tự giải bài tập này.

9. AB.CD = AD.BC là cần và đủ để phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ đi qua một điểm trên BD. Xem Bài 16 Chuyên đề 2.

10. Từ ax + by + cz = 2S và bất đẳng thức

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (ax+by+cz)^2$$

ta suy ra $x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$ Dấu '=' xảy ra khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

11. Theo Bài 14 Chuyên đề 3, trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ A và AA_1 là các đường đẳng giác trong $\widehat{BAC}$. Vì vậy AA_1 là đường đối trung kẻ từ A trong tam giác đó. Tương tự BB_1, CC_1 là các đường đối trung kẻ từ B và C trong tam giác ABC. Ta chứng minh được AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

12. Trên tia đối của tia LL_a ta lấy điểm L_a' sao cho $LL'_a = LL_a$. Khi đó các đoạn thẳng LL_a, LL_b, LL_c là ba cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác ABC. Vì vậy tam giác LL_bL_a' đồng dạng với tam giác ABC và ta có $L_bL_a' = LL_c$, $L_bL_a' \parallel LL_c$. Tứ giác $LL_bL_a'L_c$ là hình bình hành nên LL_a' đi qua trung điểm của L_bL_c.

13. Kí hiệu A' là điểm đối xứng với A qua trung điểm M của cạnh BC. Vì AA' và AL là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$ nên bốn điểm B, C, P, Q nằm trên cùng một đường tròn (theo Bài 1 Chuyên đề 3).

14. Kí hiệu Q là giao của AJ và BC, ta có $\dfrac{KB}{KC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$. Mặt khác, từ các tam giác QAB và QCA đồng dạng, ta có $\dfrac{QA}{QB}=\dfrac{AC}{AB}$, ta suy ra

$$\frac{QA^2}{QB^2}=\frac{AC^2}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{QB.QC}{QB^2}=\frac{AC^2}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{QC}{QB}=\frac{AC^2}{AB^2}.$$

Từ các kết quả đó ta suy ra $\dfrac{KB}{KC}=\dfrac{QB}{QC}$. Kẻ qua I một đường thẳng song song với AC. Đường thẳng đó cắt AQ và AL lần lượt tại S và R, khi đó ta có $\frac{LI}{LC} = \frac{IR}{AC}$ và $\frac{JI}{JC} = \frac{IS}{AC}$. Kẻ qua B đường thẳng song song với AC. Đường thẳng đó cắt AQ và AL tương ứng tại S' và R', khi đó ta có $\frac{KB}{KC} = \frac{BR'}{AC}$ và $\frac{QB}{QC} = \frac{BS'}{AC}$. Từ $\frac{KB}{KC} = \frac{QB}{QC}$ ta suy ra BR' = BS'. Vì SR // S'R' nên IR = IS và $\frac{LI}{LC} = \frac{JI}{JC}$. Sử dụng kết quả Bài 12, ta suy ra điều cần chứng minh.

15. Giả sử các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại P, H là chân đường cao kẻ từ A. Từ Bài toán 15 ta suy ra $\frac{AL}{AP} = \frac{KL}{KP}$ (1). Vì AH và PM cùng vuông góc với BC do đó AH // PM. Ta kẻ EF // AH và đi qua L (E thuộc AM và F thuộc BC). AH cắt ML tại N, ta có $\frac{AL}{AP} = \frac{LE}{PM}$, $\frac{KL}{KP} = \frac{LF}{MP}$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra LE = LF, tức là NA = NH.

16. a) Chỉ cần chứng minh rằng M là điểm Lemoine. Gọi A_2 là giao điểm thứ hai của AA_1 và đường tròn nội tiếp, khi đó tứ giác $A_1C_1A_2B_1$ có tích các cặp cạnh đối bằng nhau, do đó AA_1 là đường đối trung của tam giác $A_1B_1C_1$ thuộc góc $\widehat{B_1A_1C_1}$. Tương tự, BB_1 và CC_1 là các đường đối trung trong tam giác $A_1B_1C_1$.

CHUYÊN ĐỀ 5

ĐỊNH LÍ CÁC-NÔ VỚI BÀI TOÁN ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG THẲNG

Định lí Các-nô. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1. Kí hiệu x là đường thẳng đi qua A_1 và vuông góc với BC ; y là đường thẳng đi qua B_1 và vuông góc với AC ; z là đường thẳng đi qua C_1 và vuông góc với AB. Để ba đường thẳng đó đồng quy điều kiện cần và đủ là

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0. \qquad (*)$$

Chứng minh

Điều kiện cần. Nếu M là điểm chung của x, y, z thì ta có các đẳng thức sau đây $MB^2 - MC^2 = A_1B^2 - A_1C^2$; $MC^2 - MA^2 = B_1C^2 - B_1A^2$; $MA^2 - MB^2 = C_1A^2 - C_1B^2$.

Bằng cách cộng ba đẳng thức đó ta được điều cần chứng minh.

Điều kiện đủ. Vì x vuông góc với BC ; y vuông góc với AC và các điểm A, B, C không thẳng hàng, nên x cắt y tại điểm M. Ta có $A_1B^2 - A_1C^2 = MB^2 - MC^2$ và $B_1C^2 - B_1A^2 = MC^2 - MA^2$. Cộng các đẳng thức trên ta được $A_1B^2 - CA_1^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = MB^2 - MA^2$. Từ đó và theo giả thiết ta suy ra $C_1B^2 - C_1A^2 = MB^2 - MA^2$. Kí hiệu H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB và I là trung điểm của đoạn AB, ta có $MB^2 - MA^2 = 2\,\overline{BA}.\overline{IH}$. Gọi H' là hình chiếu của C_1 trên AB, ta có $C_1B^2 - C_1A^2 = 2\,\overline{BA}.\overline{IH'}$. Từ các kết quả trên ta suy ra $\overline{IH} = \overline{IH'}$ và đẳng thức này chứng tỏ MC_1 vuông góc với AB.

Hệ quả. Nếu x, y, z đồng quy và các điểm A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng thì các đường thẳng x_1, y_1, z_1 lần lượt đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 đồng quy.

(Hệ quả này là tính đối ngẫu của hai bộ ba đường thẳng x, y, z và x_1, y_1, z_1).

Chứng minh. Để chứng minh khẳng định trên, ta cần nghiệm lại điều kiện sau đây $AB_1^2 - AC_1^2 + BC_1^2 - BA_1^2 + CA_1^2 - CB_1^2 = 0$. Muốn vậy chỉ cần nhân cả hai vế của (*) với –1, ta được điều cần chứng minh.

BÀI TẬP

1. AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC. Trên AA', BB', CC' ta lấy các điểm tương ứng A_1, B_1, C_1 không trùng với trực tâm tam giác và không thẳng hàng. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C lần lượt vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

2. Cho một tứ giác lồi ABCD. Kí hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng nếu A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng thì các đường thẳng đi qua A, B, C và tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

3. Cho tam giác đều ABC và một điểm D bất kì. Kí hiệu A_1, B_1, C_1 tương ứng là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

4. Các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC được kí hiệu bởi A_1, B_1, C_1. Trên các đường vuông góc với BC, CA, AB và cùng đi qua một điểm M ta lấy các điểm tương ứng A_2, B_2, C_2 sao cho các điểm đó không thẳng hàng. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 và tương ứng vuông góc với các đường thẳng B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, đồng quy.

5. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Xét các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng trên các tia IA', IB', IC'. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

6. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 tương ứng vuông góc với BC, CA, AB đồng quy. Gọi A_2 là điểm đối xứng với A_1 qua trung trực của BC ; B_2 là điểm đối xứng với B_1 qua trung trực của CA ; C_2 là điểm đối xứng với C_1 qua trung trực của AB. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A_2, B_2, C_2 tương ứng vuông góc với BC, CA, AB, đồng quy.

7. Các đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C'. Chứng minh rằng các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB tại A', B', C', đồng quy.

8. Trên các cạnh BC, CA, AB và về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các hình vuông BCMN, ACPQ, ABEF. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Kí hiệu A_1 là giao điểm của AG và FQ ; B_1 là giao điểm của BG và NE ; C_1 là giao điểm của CG và MP. Ta xác định các điểm A_2, B_2, C_2 như sau $\overrightarrow{FC_2} = \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{NA_2} = \overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{PB_2} = \overrightarrow{CG}$. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A_2, B_2, C_2 tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

9. Các đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C'. Kí hiệu A_1, A_2 là giao điểm của AA' và đường tròn nội tiếp tam giác, trong đó A_1 thuộc đoạn AA_2. Các giao điểm B_1, B_2 của BB' và đường tròn nội tiếp tam giác, trong đó B_1 thuộc đoạn BB_2. Đường thẳng CC' cắt đường tròn nội tiếp tam giác tại các điểm C_1, C_2, trong đó C_1 thuộc đoạn CC_2. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

10. AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC và H là trực tâm tam giác đó. Kí hiệu (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB'C', BA'C', CA'B'. Một đường thẳng d đi qua H cắt lần thứ hai các đường tròn (O_1) tại A_1, (O_2) tại B_1, (O_3) tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A_1 và song song với AA', đi qua B_1 và song song với BB', đi qua C_1 và song song với CC', đồng quy.

11. Cho tam giác ABC và một đường thẳng d cắt hai cạnh AB và AC. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên d. Đường tròn ngoại tiếp tam giác A'CC' cắt BC tại A_1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BB'C' cắt AB tại C_1. Giả sử M là giao điểm của A_1A' và C_1C'. Đường thẳng MB' cắt AC tại B_1. Chứng minh rằng bốn điểm B_1, B', C, C' nằm trên cùng một đường tròn.

12. Cho tam giác ABC. Một đường tròn đi qua BC cắt các cạnh AB và AC tương ứng tại các điểm P và Q. Kí hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng PQ, PB, QC. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A và vuông góc với B_1C_1, đi qua B và vuông góc với A_1C_1, đi qua C và vuông góc với A_1B_1, đồng quy.

13. Ba đường tròn tâm lần lượt là ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn tâm A cắt đường tròn tâm B tại hai điểm M và N. Đường tròn tâm B cắt đường tròn tâm C tại hai điểm E và F. Đường tròn tâm C cắt đường tròn tâm A tại hai điểm P và Q. Trên các đường thẳng MN, EF, PQ ta lấy các điểm tương ứng C_1, A_1, B_1 sao cho ba điểm đó không thẳng hàng. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C và lần lượt vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

14. Cho ba đường tròn tâm lần lượt là ba điểm A, B, C không thẳng hàng sao cho đường tròn tâm A và đường tròn tâm B tiếp xúc ngoài với nhau tại M và cùng tiếp xúc trong với đường tròn tâm C lần lượt tại P và Q. Gọi C_1 là một trong các giao điểm của đường tròn tâm C và tiếp tuyến chung của hai đường tròn tâm A và B tại M. Trên tiếp tuyến tại P và Q với đường tròn tâm C ta lấy điểm tương ứng B_1 và A_1 sao cho ba điểm A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng đi qua tâm A và B tương ứng vuông góc với các đường thẳng B_1C_1 và A_1C_1. Chứng minh rằng K luôn nằm trên một đường thẳng cố định, khi các điểm A_1 và B_1 thay đổi sao cho đường thẳng A_1B_1 có phương không đổi.

15. Cho hình vuông ABCD và điểm A_1 không trùng với các đỉnh hình vuông và tâm hình vuông. Trên các đường thẳng A_1C và A_1D ta lấy các điểm tương ứng C_1 và B_1 sao cho B_1C_1 // A_1B. Gọi P là giao điểm các đường thẳng đi qua A_1, C_1 tương ứng song song với AB và BC. Chứng minh rằng B_1P vuông góc với AC.

16. Bên trong tam giác ABC ta lấy điểm M. Giả sử tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh A_1, B_1, C_1 nằm tương ứng trên các cạnh BC, CA, AB sao cho B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 lần lượt vuông góc với MA, MB, MC. Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 có một điểm chung N và các cặp đường thẳng AM và AN, BM và BN, CM và CN là những đường đẳng giác trong ba góc của tam giác ABC.

17. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm tam giác. Xét các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng vuông góc với AG, BG, CG. Chứng minh rằng các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1 cắt nhau tại trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

BỒI DƯỠNG TOÁN LÝ - HÓA CẤP 2-3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

18. Các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại A_1, với CA tại B_1, với AB tại C_1. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

19. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC và về phía ngoài tam giác ta dựng các tam giác cân ABC_1, BCA_1, CAB_1 với các đáy tương ứng là AB, BC, CA. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

(Đề thi thi vô địch Mỹ năm1997).

20. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác nhọn ABC ta lấy lần lượt các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều có diện tích nhỏ nhất trong các tam giác đều có các đỉnh nằm trên ba cạnh tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy.

(Đề thi chọn đội tuyển Mỹ năm 2008).

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

2. Rõ ràng các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 tương ứng vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau tại D.

3. Kí hiệu M là tiếp điểm của đường tròn tâm A_1 với BC và $x = DA$, $y = DB$, $z = DC$, $AB = 1$. Ta có $MB = \dfrac{1+y-z}{2}$, $MC = \dfrac{1+z-y}{2}$. N là tiếp điểm của đường tròn tâm B_1 với AC, ta có $NA = \dfrac{1+x-z}{2}$, $NC = \dfrac{1+z-x}{2}$. K là tiếp điểm của đường tròn tâm C_1 với AB, khi đó

$$KA = \frac{1+x-y}{2},\ KB = \frac{1+y-x}{2}.$$

Ta xét $A_1B^2 - A_1C^2 = MB^2 - MC^2 = \left(\dfrac{1+y-z}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1+z-y}{2}\right)^2 = y - z.$

5. Các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB cắt nhau tại I nên các đường thẳng đi qua A, B, C lần lượt vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, cắt nhau tại một điểm.

6. Từ điều kiện đã cho ta có $A_1B = A_2C$ và $A_1C = A_2B$. Vì vậy

$$A_1B^2 - A_1C^2 = A_2C^2 - A_2B^2.$$

7. Kí hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với tam giác ABC. Dễ dàng chứng minh rằng A_1 và A' đối xứng với nhau qua trung trực của BC.

8. Hãy chứng minh rằng GA_1 vuông góc với FQ và tam giác $A_2B_2C_2$ có các cạnh tương ứng song song với FQ, NE, MP.

10. H là điểm chung của ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB'C', BA'C', CA'B'. Các điểm A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của A, B, C trên đường thẳng đang xét. Ta coi A_1 nằm giữa B_1C_1 và đặt $AA_1 = x$, $BB_1 = y$, $CC_1 = z$, $A_1B_1 = c$, $B_1C_1 = a$, $C_1A_1 = b$. Ta có $A_1B^2 = y^2 + c^2$, $A_1C^2 = z^2 + b^2$, $B_1C^2 = z^2 + a^2$, $B_1A^2 = x^2 + c^2$, $C_1A^2 = x^2 + b^2$, $C_1B^2 = y^2 + a^2$.

12. Ta chứng minh được rằng các đường thẳng đi qua A_1 và vuông góc với BC, đường thẳng đi qua B_1 và vuông góc với AC, đường thẳng đi qua C_1 và vuông góc với AB cắt nhau tại một điểm. Điểm đó đối xứng với tâm đường tròn qua trọng tâm của tứ giác BCQP.

13. Hiển nhiên các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 và tương ứng vuông góc với BC, CA, AB, cắt nhau tại một điểm.

14. Đường thẳng C_1M đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến với đường tròn tâm C tại P và Q. Do đó K nằm trên đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

15. Kí hiệu x, y, z lần lượt là các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với A_1B, A_1C, A_1D. Ta chứng minh được rằng x, y, z đồng quy. Đối với tam giác $A_1B_1C_1$ thì x đi qua A và vuông góc với B_1C_1 ; y đi qua B và vuông góc với A_1C_1 ; z đi qua C vạ vuông góc với A_1B_1. Do đó ba đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB, đồng quy.

16. Từ điều kiện của bài toán, ta suy ra các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB, cắt nhau tại một điểm N. Các tứ giác AB_1NC_1, BA_1NC_1, CA_1NB_1 nội tiếp. Điều đó chứng tỏ các đường tròn lần lượt ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 có một điểm chung. Ta thấy AG chứa đường cao và AN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 do đó AG và AN là cặp đường đẳng giác của góc $\widehat{BAC}$.

17. Từ điều kiện của bài toán, ta suy ra rằng các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 tương ứng vuông góc với BC, CA, AB, đồng quy tại một điểm. Ta cần chứng minh rằng nếu các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ vuông góc với các đường trung tuyến của tam giác ABC thì các các đường trung tuyến của tam giác $A_1B_1C_1$ vuông góc với các cạnh của tam giác ABC. Gọi E là điểm đối xứng với G qua trung điểm của cạnh BC, khi đó tam giác GEC có ba cạnh tương ứng nằm trên các trung tuyến của tam giác ABC hoặc song song với cạnh của tam giác đó. Vì vậy hai tam giác $A_1B_1C_1$ và GEC có các cặp cạnh vuông góc với nhau nên hai tam giác đó đồng dạng và các cặp trung tuyến tương ứng của hai tam giác vuông góc với nhau. Vì các trung tuyến của tam giác GEC tương ứng nằm trên cạnh hoặc song song với các cạnh tương ứng của tam giác ABC, suy ra các trung tuyến của tam giác $A_1B_1C_1$ tương ứng vuông góc với các cạnh của tam giác ABC.

20. Dựng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Các đường tròn đó cùng đi qua một điểm M nằm trong tam giác ABC. Vì $A_1C_1 = MB.\sin B$, $A_1B_1 = MC.\sin C$ và $B_1C_1 = MA.\sin A$ nên các tỉ số $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$, $\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$. Điều đó chứng tỏ M là điểm chung của hai đường tròn cố định hoặc một đường tròn cố định và một đường trung trực của một cạnh tam giác. Diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ phụ thuộc vào A_1C_1 nên diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ nhỏ nhất khi A_1C_1 nhỏ nhất mà điều này xảy ra khi MA_1 và MC_1 vuông góc với hai cạnh tam giác. Khi đó MB_1 cũng vuông góc với cạnh thứ ba. Thật vậy ta có $A_1C_1^2 = MA_1^2 + MC_1^2 + 2\ MA_1.MC_1.\cos B$. Vì các số hạng của vế phải dương nên A_1C_1 nhỏ nhất khi MA_1 và MC_1 đồng thời nhỏ nhất.

CHUYÊN ĐỀ 6

ĐƯỜNG THẲNG Ơ-LE CỦA MỘT TAM GIÁC

Ta biết rằng trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác nằm trên cùng một đường thẳng, đường thẳng đi qua ba điểm đó được gọi là đường thẳng Ơ-le của tam giác đã cho. Đường thẳng Ơ-le của tam giác vuông đi qua đỉnh góc vuông và trung điểm của cạnh huyền. Đường thẳng Ơ-le của tam giác cân chứa đường trung trực của cạnh đáy tam giác. Đường thẳng Ơ-le của tam giác đều không xác định. Tất cả các bài toán được phát biểu dưới đây liên quan đến tam giác bất kỳ.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc nhọn và AB là cạnh nhỏ nhất, BC là cạnh lớn nhất thì đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC cắt hai cạnh đó.

2. Chứng minh rằng nếu $\widehat{A} > 90^0$ và AB là cạnh nhỏ nhất thì đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC cắt các cạnh AC và BC.

3. Giả sử A(a ; 0), B(b ; 0), C(0 ; c) là các đỉnh của tam giác ABC trong hệ toạ độ Đềcác. Hãy viết phương trình đường thẳng Ơ-le của tam giác đó.

4. Kí hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng đường thẳng Ơ-le.

5. Chứng minh rằng nếu O' là điểm đối xứng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua cạnh BC thì đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC đi qua trung điểm của đoạn thẳng AO'.

6. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn. Kí hiệu A' là điểm chính giữa của cung BC không chứa A, B' là điểm chính giữa của cung AC không chứa B, C' là trung điểm của cung AB không chứa C.

a) Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác A'B'C' đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Kí hiệu A_1, B_1, C_1 là các tiếp điểm tương ứng của BC, CA, AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác $A_1B_1C_1$ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

7. Gọi A_1, B_1 là các giao điểm thứ hai của hai đường cao tam giác ABC kẻ từ các đỉnh A và B với đường tròn ngoại tiếp tam giác. Giả sử các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A và A_1 cắt nhau tại P_1. Các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác tại B và B_1 cắt nhau tại Q_1. Gọi A_2, B_2 lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ các đỉnh A và B với đường tròn ngoại tiếp tam giác. Giả sử các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A và A_2 cắt nhau tại P_2. Các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác tại B và B_2 cắt nhau tại Q_2. Chứng minh rằng $P_1Q_1 /\!/ P_2Q_2$.

8. Cho H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng Ơ-le của các tam giác ABH, BCH, CAH đồng quy.

9. Kí hiệu H' là điểm đối xứng với trực tâm H của tam giác ABC qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác H'BC, H'CA, H'AB. Chứng minh rằng các đường thẳng AG_1, BG_2, CG_3 đồng quy.

10. Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho M nhìn ba cạnh tam giác đó dưới cùng một góc có số đo 120^0. Chứng minh rằng các đường thẳng Ơ-le của các tam giác MAB, MBC, MCA đồng quy.

11. Kí hiệu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Trên các tia BA và CA ta lấy các điểm tương ứng M và N sao cho BM = CN = BC. Gọi H là giao điểm của BN và CM ; A_1 là giao của AI và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng đường Ơ-le của tam giác IBC là A_1H ;

b) Gọi B_1 và C_1 là các giao điểm thứ hai của BI và CI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng A_1H đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối các trực tâm của hai tam giác IBC_1 và ICB_1.

12. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC ta lấy điểm D. Chứng minh rằng nếu đường thẳng Ơ-le của tam giác ABD song song với AC thì đường thẳng Ơ-le của tam giác ACD song song với AB.

13. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm C', B'. Gọi I là tâm của đường tròn đó. P và Q tương ứng là các giao điểm của B'C' với các đường thẳng BI và CI ; K là giao điểm của CP và BQ ; A_1 là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng A_1K là đường thẳng Ơ-le của tam giác BIC.

14. AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC. Kí hiệu d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng Ơ-le của các tam giác AB'C', BC'A', CA'B'. Phép đối xứng qua phân giác góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ biến d_1, d_2, d_3 tương ứng thành các đường thẳng d_1', d_2', d_3'. Chứng minh rằng $d_1' // d_2' // d_3'$.

15. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kí hiệu G là trọng tâm của tứ giác đó. I là trung điểm của đoạn OG. Chứng minh rằng phép đối xứng qua I biến các điểm A, B, C, D tương ứng thành trực tâm tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.

16. AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Kí hiệu (ω_1), (ω_2) . (ω_3) lần lượt là đường tròn đi qua A, A' và tiếp xúc với OA, đường tròn đi qua B, B' và tiếp xúc với OB, đường tròn đi qua C, C' và tiếp xúc với OC. Chứng minh rằng ba đường tròn đó cắt nhau tại hai điểm nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC.

17. Cho tam giác ABC. Kí hiệu x, y, z lần lượt là các đường thẳng đi qua các đỉnh A, B, C và song song với nhau. Các đường thẳng x', y', z' tương ứng là ảnh của x, y, z trong phép đối xứng qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng x', y', z' đồng quy khi và chỉ khi x song song với đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC.

(Đề thi vô địch Toán quốc gia Iran năm 2008).

18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kí hiệu A', B', C' lần lượt là chân ba đường cao của tam giác trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng Ơ-le của ba tam giác AB'C', BC'A', CA'B' cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

19. Phép đối xứng qua các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC có ba góc nhọn biến đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC tương ứng thành các đường thẳng d_1, d_2, d_3. Chứng minh rằng các đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Kí hiệu A', B', C' là chân các đường cao của tam giác ABC lần lượt thuộc BC, CA, AB. Theo giả thiết, trực tâm H và tâm O của đường tròn ngoại tiếp ABC nằm trong tam giác ABC. Vì AC < BC nên trung điểm của cạnh AB nằm trên đoạn BC' và tâm O nằm miền trong của góc $\widehat{BC'C}$. Từ AB < AC, trung điểm của cạnh BC nằm trên đoạn A'C và tâm O nằm miền trong của góc $\widehat{AA'C}$. Từ đó ta suy ra O thuộc phần chung của hai miền góc $\widehat{BC'C}$ và $\widehat{AA'C}$. Phần chung đó là miền góc $\widehat{A'HC}$. Vì vậy đường thẳng OH phải cắt các đoạn A'C và C'A.

2. Trong trường hợp này tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm miền trong của góc $\widehat{A'AC}$ (A' là hình chiếu của A trên BC). Trực tâm H của tam giác ABC nằm miền trong của góc đối đỉnh với góc $\widehat{BAC}$. Nghĩa là H và O khác phía đối với AC. Do đó OH phải cắt AC và BC.

3. Trực tâm $H(0\,;\,-\frac{ab}{c})$, trọng tâm $G(\frac{a+b}{3}\,;\,\frac{c}{3})$. Phương trình đường thẳng

$$\text{GH là } \frac{x}{a+b}=\frac{y+\frac{ab}{c}}{c+\frac{3ab}{c}}.$$

4. Kí hiệu G là trọng tâm tam giác ABC. Phép vị tự $V_G^{-\frac{1}{2}}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$ nên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC biến thành đường thẳng Ơ-le của tam giác $A_1B_1C_1$ và hai đường thẳng đó hoặc song song với nhau hoặc trùng nhau. Để ý rằng G cũng là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$ nên G là điểm chung của của hai đường thẳng Ơ-le. Đây là điều cần chứng minh.

5. Rõ ràng trọng tâm G của tam giác ABC cũng là trọng tâm của tam giác AOO' vì vậy đường thẳng OG đi qua trung điểm của AO'.

6. a) Rõ ràng các đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta chứng minh được rằng I là trực tâm tam giác A'B'C'. Vì vậy đường thẳng đi qua I và tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường thẳng Ơ-le của tam giác A'B'C'.

b) Ta thấy rằng cạnh A_1B_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ vuông góc với CC' nên A_1B_1 // A'B'. Hai tam giác A'B'C' và $A_1B_1C_1$ có các cạnh song song nên tồn tại một phép vị tự biến tam giác A'B'C' thành tam giác $A_1B_1C_1$ và đường thẳng OI biến thành đường thẳng Ơ-le của tam giác $A_1B_1C_1$. Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ nên I là điểm chung của các đường thẳng Ơ-le của hai tam giác đã nói ở trên. Từ đó ta suy ra OI là đường thẳng Ơ-le của tam giác $A_1B_1C_1$.

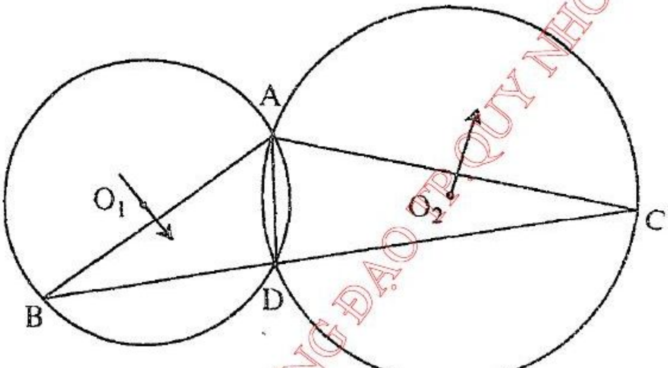
7. Hãy chứng minh rằng P_1Q_1 và P_2Q_2 phân biệt và cùng vuông góc với đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC.

8. Ta biết rằng trực tâm tam giác HCB là A và tâm đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác HCB đối xứng với tâm O của đường tròn ngoại tiếấctm giác ABC do đó O'A là đường thẳng Ơ-le của tam giác HBC. Ta cũng biết rằng OO' = AH do đó AO' đi qua trung điểm của OH.

12. Kí hiệu O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD. Ta biết rằng :

$$\vec{u} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1D},\ \vec{v} = \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2D}$$

là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng Ơ-le tương ứng của hai tam giác đó và các vectơ $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{O_2A} + \overrightarrow{O_2C}$, $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1B}$ là pháp tuyến của hai đường thẳng AC và AB (H.21). Đường thẳng Ơ-le của tam giác ABD song song với AC khi và chỉ khi $\vec{u}.\overrightarrow{u'}=0$. Ta cần nghiệm lại rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác ACD song song với AB tương đương với việc chứng minh rằng $\vec{v}.\overrightarrow{v'}=0$. Vì AD là dây cung chung của hai đường tròn O_1 và O_2, phép đối xứng qua O_1O_2 biến



Hình 21

$\overrightarrow{O_1A}\to\overrightarrow{O_1D}$, $\overrightarrow{O_2D}\to\overrightarrow{O_2A}$,

do đó

$$\left(\widehat{\overrightarrow{O_1A};\overrightarrow{O_2D}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{O_2A};\overrightarrow{O_1D}}\right) \text{ và } \overrightarrow{O_1A}.\overrightarrow{O_2D}=\overrightarrow{O_2A}.\overrightarrow{O_1D}.$$

Xét hiệu của hai tích vô hướng

$$\vec{u}.\overrightarrow{u'}-\vec{v}\,\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{O_1D}.\,\overrightarrow{O_2A}+\overrightarrow{O_1D}.\overrightarrow{O_2C}-\overrightarrow{O_1B}.\overrightarrow{O_2D}-\overrightarrow{O_2D}.\overrightarrow{O_1A}$$

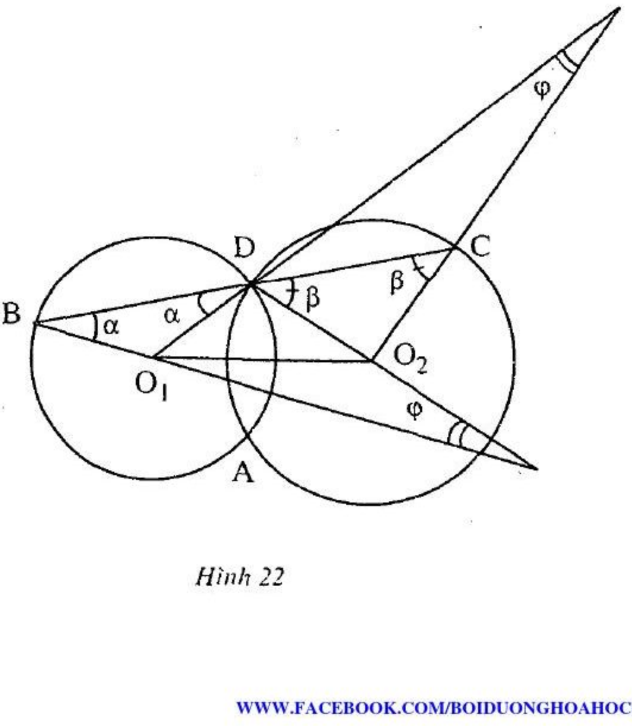
$$=\overrightarrow{O_1D}.\overrightarrow{O_2C}-\overrightarrow{O_1B}.\overrightarrow{O_2D}\ .$$

Hãy chứng minh

$$(\widehat{\overrightarrow{O_1D};\overrightarrow{O_2C}})=\left(\widehat{\overrightarrow{O_1B};\overrightarrow{O_2D}}\right)$$

trong các trường hợp sau đây.

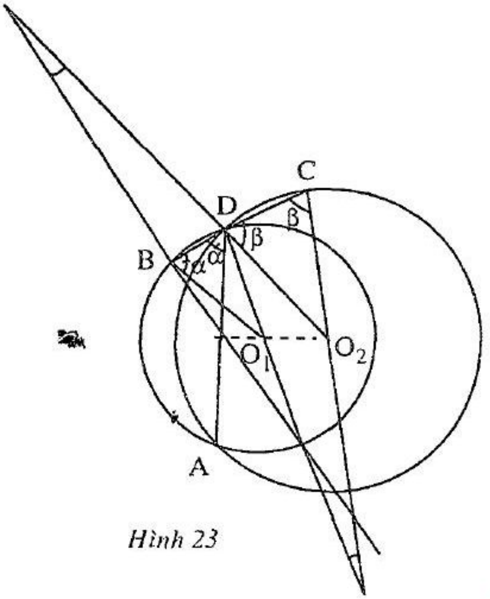
a) (H.22) D nằm trên cạnh BC và các điểm O_1, O_2 nằm khác phía đối với AD.



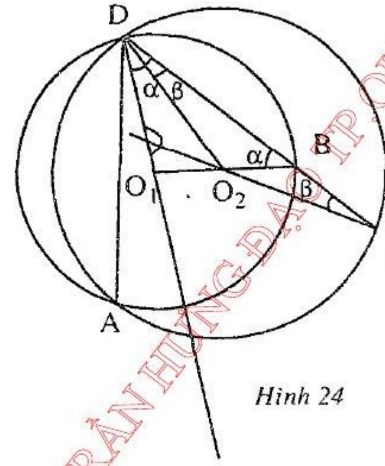
Hình 22

b) (H.23) D nằm trên cạnh BC và các điểm O_1, O_2 nằm cùng phía đối với AD.

c) D và B nằm cùng phía đối với C và các điểm O_1, O_2 nằm cùng phía đối với AD (H.24).



Hình 23



Hình 24

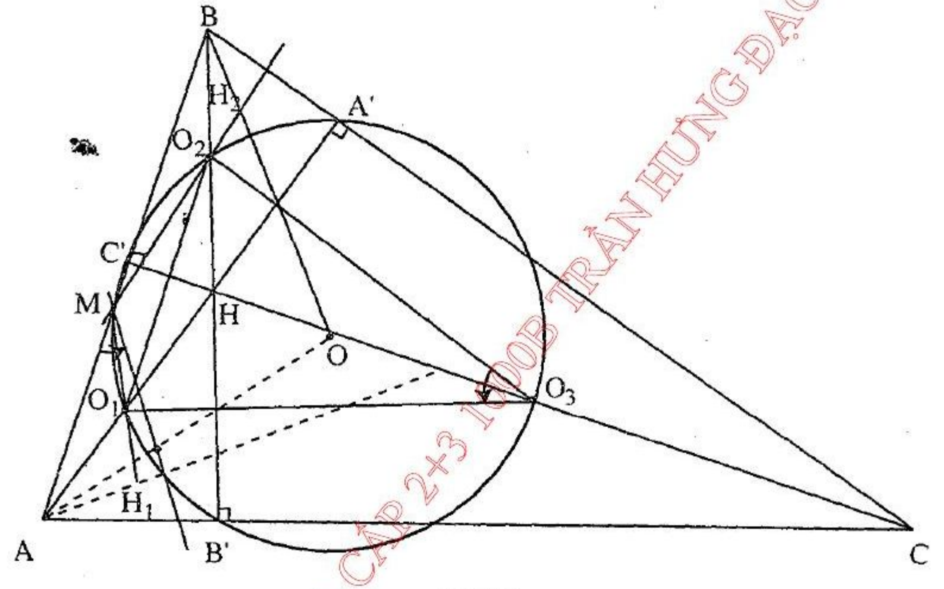
d) D và B nằm khác phía với C và các điểm O_1, O_2 nằm khác phía đối với AD. Từ đó ta được $\vec{u}.\vec{u'} = \vec{v}\vec{v'}$.

14. Ảnh của tam giác AB'C' trong phép đối xứng qua phân giác của góc $\widehat{BAC}$ là một tam giác vị tự với tam giác ABC.

16. Kí hiệu B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh AC và AB, đường thẳng B_1C_1 đi qua tâm đường tròn (ω_1). Kí hiệu K là giao điểm của (ω_1) và đoạn B_1C_1, dễ thấy rằng AK là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Vì vậy mọi điểm M thuộc (ω_1) thoả mãn điều kiện $\frac{MB}{MC} = \frac{MC_1}{MB_1} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{c}{b}$. Tương tự nếu M thuộc (ω_2) thì $\frac{MC}{MA} = \frac{a}{c}$. Nếu M thuộc (ω_3) thì $\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$. Rõ ràng nếu M là điểm chung của (ω_1) và (ω_2) thì M thoả mãn điều kiện $\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$, nghĩa là M thuộc (ω_3). Từ đó ta suy ra ba đường tròn (ω_1), (ω_2), (ω_3) cắt nhau tại hai điểm và đường thẳng đi qua các giao điểm đó là trục đẳng phương của ba đường tròn. Theo điều kiện của bài toán, các điểm O và trực tâm H của tam giác ABC có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn do đó O và H nằm trên trục đẳng phương của các đường tròn đó.

18. *Lời giải 1*. Coi $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A} < \frac{\pi}{2}$. Gọi O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Các điểm O_1 và H_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác AB'C'. Các điểm O_2 và H_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác A'BC'. Các điểm O_3 và H_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác A'B'C. Gọi K là trung điểm của đoạn OH. Khi đó, K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'. Các điểm O_1, O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của AH, BH, CH. Ta biết rằng AH và AO là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{B'AC'}$ của tam giác AB'C' nên OA vuông góc với B'C'. Tương tự đối với các tam giác BA'C' và CA'B', ta có OB vuông góc với A'C' và OC vuông góc với A'B'. Vì vậy H_1 nằm trên bán kính OA ; H_2 nằm trên bán kính OB ; H_3 trên bán kính OC. Các điểm O_1, O_2, O_3 nằm trên đường tròn (K) và chia đường tròn này thành ba cung. Từ điều kiện KO_1 // OA, KO_2 // OB và $\widehat{AOB} = 2\hat{C}$, suy ra số đo của cung $\widehat{O_1C'O_2}$ thuộc đường tròn (K) bằng hai lần số đo góc $\hat{C}$. Tương tự $\text{sđ}\,\widehat{O_2A'O_3} = 2\,\text{sđ}\,\hat{A}$, $\text{sđ}\,\widehat{O_1CO_3} = 2\,\text{sđ}\,\hat{B}$. Ta có $\widehat{OAH} = \hat{B} - \hat{C}$, $\widehat{OBH} = \hat{A} - \hat{C}$. Gọi M là giao điểm của O_1H_1 và O_2H_2. Từ sự đồng dạng của các cặp tam giác AOH và tam giác AO_1H_1 ; tam giác BOH và tam giác BO_2H_2, ta suy ra $\widehat{AO_1H_1} = \widehat{AOH}$ và $\widehat{BO_2H_2} = \widehat{BOH}$. Vì AC > AB và BC > AC nên các tia AH và BH nằm trong các góc của tam giác OAB. Do đó H nằm trong góc AOB và ta có $\widehat{AOH} + \widehat{BOH} = 2\hat{C}$. $\widehat{OH_1M} = \widehat{AOH} + \hat{A} - \hat{C}$ và $\widehat{OH_2M} = \widehat{BOH} + \hat{B} - \hat{C}$. Trong tứ giác OH_1MH_2 ta có $\widehat{H_1MH_2} = 2\pi - \left(\widehat{OH_1M} + \widehat{OH_2M} + \widehat{H_1OH_2}\right) = \pi - \hat{C}$. Vì H_1M và H_2M đi qua O_1 và O_2 thuộc (K) nên điểm M nằm trên cung $\widehat{O_1C'O_2}$ của đường tròn (K). Trong tam giác CA'B' ta có B'C > B'A' nên H_3 thuộc tia đối của tia OC. Gọi M' là giao điểm của O_2H_2 và O_3H_3. Trong tứ giác $OH_3M'H_2$ ta có $\widehat{H_3M'H_2} = \hat{A}$. Vì $\text{sđ}\,\widehat{O_3A'O_2} = 2\text{sđ}\,\hat{A}$ nên M' nằm trên đường tròn (K). Các điểm M, M', O_2 là các điểm chung của đường thẳng O_2H_2 với (K), đường thẳng $H_3\,O_3$ không thể đi qua O_2 nên M trùng với M'.

Lời giải 2. (H.25) (Một cách tính khác góc giữa hai đường thẳng Ơ-le của hai tam giác AB'C' và BA'C'). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Phép đối xứng qua AI biến O_1H_1 thành d_1' // OH. Phép đối xứng qua BI biến d_1' thành d_1" // O_2H_2. Vì vậy tích của hai phép đối xứng đó biến O_1H_1 thành d_1" // O_2H_2. Ta biết rằng tích của hai phép đối xứng đó là một phép quay tâm I với góc quay bằng $2\left(\overline{IA;IB}\right)$. (Kí hiệu $\left(\overline{IA;IB}\right)$ là góc định hướng từ đường thẳng AI đến đường thẳng BI).



Hình 25

$$\left(\overline{O_1H_1;O_2H_2}\right) = 2\left(\overline{IA;IB}\right) = 2\left(\frac{\pi+\hat{C}}{2}\right) = \hat{C} \pmod{\pi}.$$

Do tâm O nằm trong tam giác ABC nên

$$\left(\overline{OA;OB}\right) = 2\left(\overline{CA;CB}\right) = 2\hat{C} \pmod{\pi}.$$

Vì tam giác $O_1O_2O_3$ vị tự với tam giác ABC nên

$$\left(\overline{O_3O_1;O_3O_2}\right) = \hat{C} \pmod{\pi}.$$

Từ các kết quả trên ta suy ra $\left(\overline{O_1H_1;O_2H_2}\right) = \left(\overline{O_3O_1;O_3O_2}\right)$. Đẳng thức đó chứng tỏ giao điểm các đường thẳng O_1H_1 và O_2H_2 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$.

Tương tự, giao điểm của O_2H_2 và O_3H_3 nằm trên (K). Rõ ràng đường thẳng d_2 có ba điểm chung với đường tròn (K). Mâu thuẫn này chứng tỏ hai trong ba điểm đó trùng nhau. Để ý rằng d_1 và d_3 không đi qua O_2. Do đó chỉ có thể các giao điểm của các cặp đường thẳng d_1 và d_2 ; d_3 và d_2 trùng nhau.

19. *Lời giải 1.* Gọi H là trực tâm tam giác ABC và H_1, H_2, H_3 lần lượt là các giao điểm thứ hai của AH, BH, CH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta biết rằng H_1, H_2, H_3 tương ứng là các điểm đối xứng với H qua BC, CA, AB, nên d_1 đi qua H_1 ; d_2 đi qua H_2 ; d_3 đi qua H_3. Tích của hai phép đối xứng qua BC, CA biến d_1 thành d_2 nên d_2 là ảnh của d_1 qua phép quay tâm quay C với góc quay $2\left(\overline{CB;CA}\right)$. Do đó $\left(\overline{d_1;d_2}\right)=2\left(\overline{CB;CA}\right)$ (kí hiệu $\left(\overline{d_1;d_2}\right)$ là góc có hướng từ d_1 đến d_2). Mặt khác, ta có $2\left(\overline{CB;CA}\right)=\left(\overline{CH_1;CH_2}\right)$. Từ đó suy ra $\left(\overline{d_1;d_2}\right)=\left(\overline{CH_1;CH_2}\right)$. Điều này chứng tỏ d_1 cắt d_2 và giao điểm của hai đường thẳng này nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lập luận tương tự ta có $\left(\overline{d_2;d_3}\right)=\left(\overline{AH_2;AH_3}\right)$ nên giao điểm của d_2, d_3 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta thấy rằng d_2 có ba điểm chung với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vì vậy hai trong ba điểm đó trùng nhau. Ngoài ra tam giác được xét không là tam giác đều nên d_1, d_2, d_3 không đi qua đỉnh của tam giác. Vì vậy ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải 2. Ta coi $\widehat{A}>\widehat{B}>\widehat{C}$. Đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC cắt các cạnh AB, BC và phần kéo dài của cạnh AC về phía C tương ứng tại P, Q, R. Đường thẳng d_1 cắt QH tại P và phần kéo dài của HH_2 nên d_1 cắt cạnh QH_2 của tam giác QHH_2 tại M. Ta có

$$\widehat{H_1MH_2}=\widehat{MQP}+\widehat{MPQ}=2\left(\widehat{CQP}+\widehat{CPQ}\right)=2\widehat{C}.$$

Vì M và C cùng phía đối với H_1H_2 nên M nằm trên cung $\overset{\frown}{H_2CH_1}$. Đường thẳng d_3 cắt cạnh HH_2 và phần kéo dài của cạnh QH tại R nên d_3 cắt cạnh QH_2 của tam giác QHH_2 tại M'. Từ $\widehat{H_2M'H_3}=\widehat{MQR}+\widehat{MRQ}=\pi-2\widehat{A}$ và các điểm M', B cùng phía đối với H_2H_3 ta suy ra M' nằm trên cung $\overset{\frown}{H_2CH_3}$. Rõ ràng đường thẳng QH_2 có ba điểm chung với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên M phải trùng với M'.

CHUYÊN ĐỀ 7

ĐƯỜNG TRÒN Ơ-LE

Đường tròn đi qua chân ba đường cao, trung điểm ba cạnh và trung điểm của ba đoạn thẳng nối trực tâm và các đỉnh của một tam giác được gọi là đường tròn Ơ-le của tam giác đó. Tâm của đường tròn này là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đã cho.

BÀI TẬP

1. AA_1 là đường cao của tam giác ABC ; H là trực tâm của tam giác đó. P là điểm tuỳ ý nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Q là điểm được lấy trên đường thẳng PH thoả mãn điều kiện $\overline{HP}.\overline{HQ} = \overline{HA}.\overline{HA_1}$. Chứng minh rằng Q nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

2. Trên các cạnh AB và AC của tam giác ABC ta lấy các điểm M và N. Các đường tròn đường kính BN và đường tròn đường kính CM cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh rằng nếu P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì Q nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác đó.

3. Một đường thẳng đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt các cạnh AB và AC tương ứng tại các điểm M và N. Chứng minh rằng các đường tròn đường kính BN, CM và đường tròn Ơ-le của tam giác ABC đi qua cùng một điểm.

4. Giả sử A(a ; 0), B(b ; 0), C(0 ; c) là các đỉnh của tam giác ABC trong hệ toạ độ Đề-các. Hãy viết phương trình đường tròn Ơ-le của tam giác đó.

5. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là giao điểm của AI với BC và A_1 là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp tam giác ABC đi qua M và khác BC song song hoặc trùng với tiếp tuyến với đường tròn Ơ-le của tam giác ABC tại A_1.

6. Chứng minh rằng đường tròn Ơ-le của tam giác ABC tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp và tiếp xúc ngoài với các đường tròn bàng tiếp tam giác đó.

7. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn Ơ-le của tam giác ABC tiếp xúc trong với các đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, BCH, CAH.

8. Các điểm H, I, O tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $OH \geq IH\sqrt{2}$;

b) Nếu $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$ thì I là điểm trong của tam giác BOH.

9. Kí hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt là chân các đường cao tương ứng trên các cạnh đó. A_3, B_3, C_3 là các tiếp điểm tương ứng của đường tròn nội tiếp tam giác. A_4, B_4, C_4 lần lượt là điểm chính giữa của các cung $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{B_1B_2}$, $\overset{\frown}{C_1C_2}$ thuộc đường tròn Ơ-le của tam giác ABC và nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng :

a) Các đường thẳng A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4 đồng quy ;

b) Tam giác $A_3B_3C_3$ đồng dạng với tam giác $A_4B_4C_4$.

10. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và một đường thẳng d đi qua điểm O cắt hai cạnh AC và BC. Các hình chiếu tương ứng L và K của các điểm A và B trên d. Một đường thẳng đi qua L và vuông góc với BC cắt đường thẳng đi qua K và vuông góc với AC tại điểm M. Chứng minh rằng M nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

11. Các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đoạn A_1C_1 tại M và phần kéo dài của đoạn A_1B_1 tại N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1MN nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

12. H là trực tâm tam giác ABC. Dây cung MN của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại P, trong đó N nằm trên cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa điểm A. Một đường thẳng đi qua P và song song với AN cắt MH tại Q. Chứng minh rằng Q nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

13. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng tâm các đường tròn Ơ-le của các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB nằm trên cùng một đường tròn.

14. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm M cố định nằm ngoài đường tròn. Xét tất cả các tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn đã cho và nhận M là trung điểm của một cạnh tam giác. Tìm tập hợp tâm đường tròn Ơ-le của các tam giác đó.

15. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm M cố định nằm ngoài đường tròn. Xét tất cả các tam giác ABC nhận (O ; R) là đường tròn bàng tiếp và M là trung điểm của một cạnh tam giác. Tìm tập hợp tâm đường tròn Ơ-le của các tam giác đó.

16. Cho một đường thẳng d cố định tiếp xúc với đường tròn (O ; R). Tìm tập hợp tâm đường tròn Ơ-le của mọi tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn đã cho và luôn tiếp xúc với đường thẳng d.

17. H là trực tâm của tam giác ABC ; M là trung điểm của cạnh BC ; N là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa đỉnh A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đoạn thẳng HN cắt đường tròn Ơ-le của tam giác ABC tại E. Các đoạn thẳng HB và HC cắt đường tròn Ơ-le của tam giác ABC lần lượt tại các điểm K và L. Kí hiệu (E) là đường tròn tâm E đi qua trung điểm của đoạn thẳng HM. Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn (E) và đường tròn Ơ-le đi qua các điểm K và L.

18. Chứng minh rằng những điểm đối xứng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua trung điểm của mỗi trung tuyến của tam giác đó nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Kí hiệu ω là tâm đường tròn Ơ-le của tam giác ABC ; P_0 và A_0 lần lượt là các trung điểm của HP và HA ; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ điều kiện $\overline{HP}.\overline{HQ} = \overline{HA}.\overline{HA_1}$, ta suy ra rằng $\overline{HP_0}.\overline{HQ} = \overline{HA_0}.\overline{HA_1}$. Vì vậy các điểm P_0, A_1, A_0, Q nằm trên cùng một đường tròn. Trong tam giác HOP đường ωP_0 là đường trung bình, nên $\omega P_0 = \frac{OP}{2} = \frac{R}{2}$ (R là bán kính đường tròn O). Đẳng thức đó chứng tỏ P_0 nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC. Đường tròn đi qua ba điểm P_0, A_1, A_0 là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC. Đó là điều cần chứng minh.

2. Kí hiệu H là trực tâm tam giác ABC. Từ điều kiện đã cho ta suy ra PQ đi qua H. Nếu BB_1 là một trong các đường cao của tam giác ABC thì ta có $\overline{HPHQ} = \overline{HB}.\overline{HB_1}$. Theo kết quả của Bài 1, ta suy ra điều cần chứng minh.

3. Kí hiệu BB', CC' là các đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm M_1 và N_1 (N_1 nằm trên cung $\overset{\frown}{CB'}$). Ta xét trường hợp O nằm trên đoạn MN. Vì M và N nằm trên các cạnh AB và AC nên các điểm M và N nằm trong các miền góc $\widehat{BOC'}$ và $\widehat{COB'}$. Giả sử P là giao điểm thứ hai của B'N và đường tròn (O), khi đó $\widehat{BPN} = 90^0$ và P thuộc đường tròn đường kính BN. Vì PB' cắt đường kính M_1N_1 do đó P và B' khác phía đối với đường kính M_1N_1. Hơn nữa, C và B' cũng khác phía đối với đường kính M_1N_1 nên các điểm P và C nằm trên nửa đường tròn đường kính M_1N_1 không chứa A, nghĩa là P nằm trên cung $\overset{\frown}{BCN_1}$. Vì OM nằm trong góc $\widehat{BOC'}$ nên C' và B khác phía đối với M_1N_1. Bằng cách sử dụng định lí Pascal đối với lục giác AB'CPBC', ta suy ra C'P đi qua M. Điều đó chứng tỏ P thuộc đường tròn đường kính CM. Trường hợp O nằm ngoài đoạn MN, chẳng hạn M nằm giữa hai điểm ON. Lập luận tương tự như trường hợp trên và áp dụng định lí Pascal cho lục giác APCBC'B', ta suy ra PC' đi qua M. Vì P thuộc (O), theo Bài 2, ta suy ra Q thuộc đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

5. Giả sử tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại N. Tam giác AMN cân tại N. Tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp tam giác đi qua M khác BC đối xứng BC qua phân giác AM. Từ đó ta suy ra góc so le tạo bởi hai tiếp tuyến trên với AM bằng nhau. Điều này chứng tỏ hai tiếp tuyến song song với nhau. Mặt khác, phép vị tự với tâm vị tự là trọng tâm G của tam giác ABC và hệ số $-\frac{1}{2}$ biến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn Ơ-le của tam giác đó nên các tiếp tuyến của hai đường tròn tại A và A_1 song song với nhau.

6. Nếu ABC là tam giác cân thì điều khẳng định là hiển nhiên. Ta giả thiết tam giác ABC không cân. Kí hiệu A_1 là trung điểm của cạnh BC : A' là chân đường cao trên BC ; A_2 là tiếp điểm của BC với đường tròn nội tiếp tam giác ABC và M là giao điểm của BC với phân giác góc $\widehat{BAC}$. Ta biết rằng $\overline{A_1A'}.\overline{A_1M} = A_1A_2^2 = k$. Phép nghịch đảo với tâm A_1 hệ số k biến đường tròn nội tiếp thành chính nó, biến A' thành M nên biến đường tròn Ơ-le đi qua A' và A_1 thành đường thẳng d đi qua M. Theo tính chất của phép nghịch đảo, d song song với tiếp tuyến của đường tròn Ơ-le tại tâm nghịch đảo A_1. Theo Bài 5, ta suy ra d song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nghĩa là d và BC đối xứng với nhau qua AM. Vì vậy d tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đường tròn Ơ-le chỉ có một điểm chung duy nhất với đường tròn nội tiếp tam giác. Ta biết rằng phân giác AM nằm trong góc tạo bởi AA' và AA_1 nên A_2 nằm trên dây cung $A'A_1$ của đường tròn Ơ-le. Tương tự, các tiếp điểm khác của đường tròn nội tiếp với CA và AB nằm trong đường tròn Ơ-le. Điều đó chứng tỏ đường tròn nội tiếp nằm trong đường tròn Ơ-le. Kí hiệu A_3 là điểm đối xứng với A_2 qua A_1, khi đó A_3 là tiếp điểm của BC với đường tròn bàng tiếp thuộc góc $\widehat{BAC}$. Bằng phép nghịch đảo trên, đường tròn bàng tiếp biến thành chính nó và đường tròn Ơ-le thành d. Vì d cũng tiếp xúc với đường tròn bàng tiếp này nên đường tròn Ơ-le có một điểm chung với đường tròn bàng tiếp. Vì đường tròn bàng tiếp đi qua một điểm nằm ngoài đường tròn Ơ-le do đó đường tròn này chỉ có thể tiếp xúc ngoài với đường tròn Ơ-le.

7. Đường tròn Ơ-le của các tam giác ABH, BCH, ACH trùng với đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

8. a) Kí hiệu (O' ; R') là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC, khi đó O' là trung điểm của OH. Trong tam giác IOH ta có

$$IH^2 + IO^2 = 2IO'^2 + \frac{OH^2}{2} \Rightarrow 2IH^2 + 2IO^2 = 4IO'^2 + OH^2.$$

Vì đường tròn (O'; R') tiếp xúc trong với đường tròn (I) nên ta có $2O'I = R - 2R'$. Mặt khác, $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (r là bán kính đường tròn (I)). Từ các kết quả trên ta suy ra điều cần chứng minh.

b) Ta xét các trường hợp sau đây :

Trường hợp $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C} < 90^0$. Trường hợp này đường thẳng OH cắt các cạnh BC và AB do đó C và B khác phía đối với OH. Vì $\hat{B} < \hat{C}$ nên $\widehat{HBC} < \widehat{HCB} \Rightarrow HC < HB$. Kí hiệu K là giao điểm của OH và BI ; L là giao điểm của OH và CI. Trong tam giác BOH ta có $\frac{BH}{BO} = \frac{KH}{KO}$. Trong tam giác CHO ta có

$$\frac{CH}{CO} = \frac{LH}{LO} \Rightarrow \frac{KH}{KO} > \frac{LH}{LO} \Rightarrow \frac{KH}{KO} + 1 > \frac{LH}{LO} + 1 \Rightarrow \frac{OH}{KO} > \frac{OH}{LO} \Rightarrow KO < LO.$$

Trong tam giác BKH đường thẳng CI cắt cạnh KH và phần kéo dài của cạnh BH nên CI phải cắt cạnh BI nghĩa là I nằm trên đoạn BK.

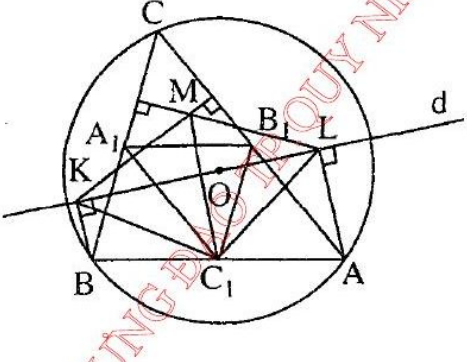
Trường hợp $\hat{C} > 90^0$. Trường hợp này OH cắt các cạnh BA và AC. Các điểm A và B khác phía đối với OH. Lập luận tương tự như trường hợp trên cho hai tam giác OBH và OAH ta nhận được điều cần chứng minh.

9. Gọi P là tiếp điểm của đường tròn Ơ-le và đường tròn nội tiếp. Dễ thấy rằng các điểm P, A_3, A_4 thẳng hàng và ta có $\overline{PA_3} = k.\overline{PA_4}$ với k = $\frac{2r}{R}$, trong đó R và r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Phép vị tự V_P^k biến tam giác $A_4B_4C_4$ thành tam giác $A_3B_3C_3$.

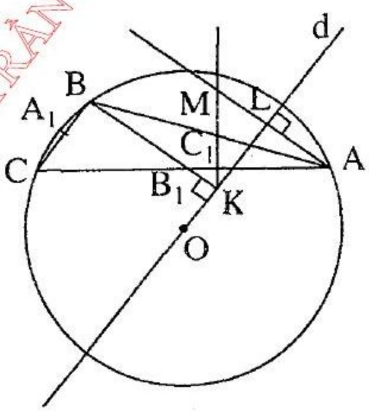
10. Kí hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Ta xét tam giác ABC có ba góc nhọn (H.26). Từ giả thiết ta suy ra các tứ giác $OLAC_1$ và $OKBC_1$ nội tiếp. Ta có

$\widehat{C_1KL} = \widehat{C_1BO} = \widehat{C_1AO} = \widehat{C_1LK} = 90^0 - \hat{C}$

$\Rightarrow \widehat{KC_1L} = 2\hat{C}$. Cung $\overset{\frown}{KL}$ trên đường tròn tâm C_1 với bán kính C_1K bị chắn bởi $\widehat{KC_1L}$ có số đo bằng $2\hat{C}$. Số đo của cung còn lại trên đường tròn đó bằng $360^0 - 2\hat{C}$. Vì KM vuông góc với AC và LM vuông góc với BC nên M nhìn dây cung KL của đường tròn tâm C_1 với bán kính C_1K dưới một góc bằng $180^0 - \hat{C}$ hoặc bằng góc $\hat{C}$. Điều đó chứng tỏ M hoặc thuộc cung $\overset{\frown}{KL}$ hoặc thuộc cung còn lại. Từ A_1C_1 // AC nên KM vuông góc với A_1C_1 điều đó chứng tỏ A_1C_1 là trục đối xứng của M và K. Ta có $\widehat{A_1MC_1} = \widehat{A_1KC_1} = \widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$.



Hình 26



Hình 27

Hơn nữa, M và B nằm về một phía đối với A_1C_1.

Từ đó ta suy ra M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Trường hợp $\hat{B} > 90^0$ (cách chứng minh tương tự, xem hình 27).

11. Trước hết ta thấy rằng các tam giác AB_1N và AC_1M cân tại các đỉnh B_1 và C_1. Trong các tam giác ABM và ACN các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh M và N có độ dài bằng nửa cạnh đối diện với các đỉnh đó. Bởi vậy BM và CN cùng vuông góc với đường thẳng AM. Với tam giác A_1BC_1 cát tuyến AMN cắt cạnh A_1C_1 và phần kéo dài của cạnh BC_1, nên các tuyến đó cắt cạnh A_1B. Gọi H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, ta biết rằng H và A_1 khác phía đối với AMN. Vì vậy H và B cùng phía đối với cát tuyến AMN. Tứ giác ACNH nội tiếp nên $\widehat{ANH} = \widehat{ACH} = \hat{C}$. Ta có $\widehat{C_1A_1B} = \hat{C}$ do đó tứ giác A_1NHM nội tiếp. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó, ta có

$$\widehat{A_1IH} = 2\widehat{A_1NH} = 2\left(\hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 2\hat{C} + \hat{A}.$$

Vì N nằm trên phần kéo dài của A_1B_1 về phía A_1 do đó

$$\hat{C} < \widehat{ACN} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 2\hat{C} + \hat{A} < 180^0.$$

Tứ giác $A_1B_1C_1H$ là một hình thang nội tiếp trong đường tròn Ơ-le nên hình thang này cân. Ta có

$$\widehat{A_1C_1H} = \widehat{B_1C_1H} - \widehat{B_1C_1A_1} = \hat{B} - \hat{C}.$$

Từ các kết quả đó ta suy ra tứ giác A_1IHC_1 là tứ giác lồi thoả mãn điều kiện

$$\widehat{A_1IH} + \widehat{A_1C_1H} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$$

nên tứ giác đó nội tiếp được.

12. Coi N nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ và kí hiệu E, F lần lượt là giao điểm của PQ với AC và AB. Nếu coi E nằm trên phần kéo dài của AC về phía C thì E và M nằm về một phía đối với BC. Ta có $\widehat{NAC} = \widehat{CEP} = \widehat{CMN} = \widehat{CMP}$ nên tứ giác PCEM nội tiếp. Vì MP vuông góc với PC nên ME vuông góc với AC. Ta có $\widehat{ECM} = \widehat{EPM} = \widehat{NPF}$. Tứ giác ABMC nội tiếp nên $\widehat{ECM} = \widehat{ABM} = \widehat{FBM}$. Cát tuyến PQ cắt cạnh BC và phần kéo dài của AC nên cát tuyến đó cắt cạnh AB. Điều này chứng tỏ F nằm trên cạnh AB, nghĩa là F và M nằm khác phía với BC. Tứ giác MPFB lồi có $\widehat{FBM} + \widehat{FPM} = 180^0$ do đó MF vuông góc với AB. Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua AB, khi đó M_1 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB (đường tròn ngoại tiếp AHB và đường tròn ngoại tiếp ABC đối xứng với nhau qua AB). Ta có $\widehat{M_1HB} = \widehat{M_1AB} = \widehat{MAB}$. Tương tự, nếu M_2 đối xứng với M qua AC thì $\widehat{M_2HC} = \widehat{MAC}$. Vì $\widehat{MAB} + \widehat{MAC} = \widehat{A}$ do đó

$$\widehat{M_1HB} + \widehat{M_2HC} + \widehat{BHC} = 180^0$$

và M_1M_2 đi qua H. Trong tam giác MM_1M_2, EF là đường trung bình nên Q là trung điểm của HM. Điều đó chứng tỏ Q nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

13. Kí hiệu O_1 là tâm đường tròn Ơ-le của tam giác ABC ; G là trọng tâm tam giác đó và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD thì ta có hệ thức vectơ $\overline{OO_1} = \frac{3}{2}\overline{OG}$. Nếu P là trọng tâm tứ giác ABCD thì ta có

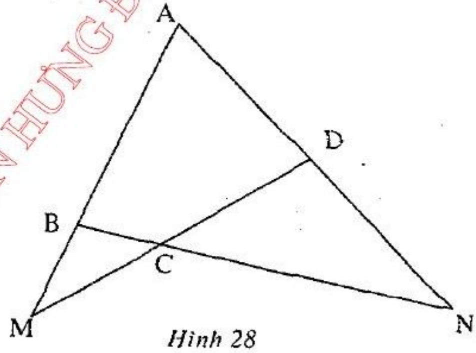
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}.$$

Từ các đẳng thức đó ta suy ra $\overrightarrow{PD} = -3\overrightarrow{PG}$ hoặc $\overrightarrow{PG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$.

Tóm lại, phép vị tự $V_P^{-(\frac{1}{3})}$ biến D thành G và phép vị tự $V_O^{\frac{3}{2}}$ biến G thành O_1 do đó tồn tại một phép vị tự biến D thành O_1.

CHUYÊN ĐỀ 8

TỨ GIÁC TOÀN PHẦN



Hình 28

Cho tứ giác lồi ABCD có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M là giao điểm của AB và CD (B thuộc đoạn AM), N là giao điểm của AD và BC (D thuộc đoạn AN). Hình tạo bởi tứ giác ABCD và hai tam giác MBC, NCD được gọi là tứ giác toàn phần (sinh bởi tứ giác đã cho), được kí hiệu ABCDMN (H.28). Các điểm A, B, C, D, M, N là đỉnh của tứ giác. Các đoạn AC, BD và MN là đường chéo tứ giác. Các cạnh của các tam giác MBC, NCD và tứ giác ABCD là cạnh của tứ giác toàn phần. Các góc trong của tứ giác ABCD và của hai tam giác MBC. NCD là các góc trong của tứ giác toàn phần. Trọng tâm của tứ giác toàn phần là điểm G thoả mãn điều kiện

$$\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD}+\overline{GM}+\overline{GN}=\overline{0}.$$

Tứ giác toàn phần ABCDMN được gọi là nội tiếp trong một đường tròn nếu tứ giác ABCD nội tiếp.

Tứ giác toàn phần ABCDMN được gọi là ngoại tiếp một đường tròn nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp.

Các kí hiệu và quy định trên đây vẫn được dùng để phát biểu các bài toán liên quan đến tứ giác toàn phần.

BÀI TẬP

1. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN. Kí hiệu H_1, H_2, H_3, H_4 là trực tâm của các tam giác MBC, NCD, MAD, NAB. Các điểm I, J, K lần lượt là trung điểm của các đường chéo AC, BD, MN. Chứng minh rằng :

a) Các điểm H_1, H_2, H_3, H_4 thẳng hàng và các điểm I, J, K thẳng hàng.

b) Nếu ABCD nội tiếp thì giao điểm của AC và BD nằm trên đường thẳng đi qua bốn trực tâm.

2. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN.

a) Chứng minh rằng bốn đường tròn ngoại tiếp bốn tam giác MBC, NCD, MAD, NAB có một điểm chung và được kí hiệu bằng M_G. (Điểm M_G được gọi là điểm Migen của tứ giác toàn phần. Bốn đường tròn ngoại tiếp bốn tam giác đó là các đường tròn Migen).

b) Kí hiệu R_1, R_2, R_3, R_4 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBC, NCD, MAD, NAB. Chứng minh rằng $\frac{R_1R_2}{CB.CD} = \frac{R_3R_4}{AB.AD}$.

c) Kí hiệu r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác NAC, MAC, NBD, MBD. Chứng minh rằng $r_1.r_3 = r_2.r_4$.

d) Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCDMN nội tiếp trong đường tròn (O ; R) thì M_G nằm trên đường chéo MN và OM_G vuông góc với đường chéo MN.

3. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN. Chứng minh rằng tâm của bốn đường tròn Migen nằm trên cùng một đường tròn và đường tròn này đi qua điểm M_G.

4. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD ; G_1 là trung điểm của đoạn IJ ; E là trung điểm của đường chéo MN. Chứng minh rằng trọng tâm G của tứ giác toàn phần nằm trên đoạn thẳng G_1E và chia đoạn này theo tỉ số $\overline{GE} : \overline{GG_1} = -2$.

5. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN. Chứng minh rằng :

a) Nếu đường thẳng Ơ-le của tam giác ABN song song với đường thẳng DM thì đường thẳng Ơ-le của tam giác ADM song song với đường thẳng BN.

b) Nếu đường thẳng Ơ-le của tam giác BCM song song với đường thẳng AD thì đường thẳng Ơ-le của tam giác CDN song song với đường thẳng AB.

6. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN. Chứng minh rằng :

a) Nếu có một trung tuyến của tam giác ABN song song với DM thì có một trung tuyến của tam giác ADM song song với BN.

b) Nếu có một trung tuyến của tam giác BCM song song với AD thì có một trung tuyến của tam giác CDN song song với AB.

7. Cho tam giác ABC. Một đường tròn đi qua hai đỉnh A và B cắt cạnh BC tại D và cạnh AC tại E. Giả sử F là giao điểm của các đường thẳng AB và DE : M là giao điểm của AD và CF. Chứng minh rằng nếu $MC^2 = MD.MA$ thì M là trung điểm của đoạn CF.

(Đề thi vô địch Mỹ năm 2003).

8. Cho tứ giác lồi ABCD. Kí hiệu O là giao điểm của AC và BD ; P là giao điểm của AB và CD ; Q là giao điểm của AD và BC. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên PQ. Chứng minh rằng tập hợp các hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA nằm trên cùng một đường tròn.

(Đề thi chọn đội tuyển Toán quốc gia Rumani năm 2008).

9. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN. Giả sử các đường phân giác ngoài của hai góc tại các đỉnh A và C cắt nhau tại P ; các đường phân giác ngoài của hai góc tại các đỉnh B và D cắt nhau tại Q ; các đường phân giác ngoài của hai góc tại các đỉnh M và N cắt nhau tại R. Chứng minh rằng các điểm P, Q, R thẳng hàng.

(Đề thi vô địch quốc gia Iran năm 2008).

10. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN nội tiếp. Giả sử P là giao điểm các tiếp tuyến với đường tròn tại B và D. Các tiếp tuyến với đường tròn tại A và C cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng các điểm P, Q nằm trên đường thẳng MN.

11. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN nội tiếp đường tròn (O ; R). Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt đường thẳng SM lần thứ hai tại M'. Đường tròn ngoại tiếp tam giác NBD cắt SN lần thứ hai tại N'. Đường thẳng SM cắt đường tròn O tại hai điểm P và Q. Chứng minh rằng :

a) M' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB và N' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD ;

b) $MS^2 = MO^2 + SO^2 - 2R^2$; $NS^2 = NO^2 + SO^2 - 2R^2$; $MN^2 = MO^2 + NO^2 - 2R^2$;

c) Điểm O là trực tâm của tam giác SMN ;

d) Các đường thẳng NP và NQ tiếp xúc với đường tròn (O).

12. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN nội tiếp. Chứng minh rằng các đường phân giác của các góc $\widehat{AMD}$ và $\widehat{ANB}$ vuông góc với nhau tại K ; K và các trung điểm của đường chéo AC, BD là ba điểm thẳng hàng.

13. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN nội tiếp. Kí hiệu I và J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng :

a) Hình chiếu của I và J trên các đường thẳng MA, MD nằm trên cùng một đường tròn. Tương tự như vậy với các hình chiếu của các điểm đó trên NA và NB.

b) Nếu AB.CD = AD.BC thì các hình chiếu của I và J trên các đường thẳng MA, MD, NA, NB cùng nằm trên một đường tròn.

14. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN nội tiếp. Giả sử P, Q, R là giao điểm của các đường thẳng AC, BD, MN. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác là trực tâm của tam giác PQR.

15. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Giả sử P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB và CD, AD và BC. Các tiếp tuyến QE và QF được kẻ từ Q tới đường tròn ngoại tiếp tứ giác (E và F là các tiếp điểm). Chứng minh rằng các điểm P, E, F thẳng hàng.

(Đề thi vô địch Trung quốc năm 1997).

16. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN ngoại tiếp. Kí hiệu A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn với các cạnh AB, BC, CD, DA. Giả sử A_1B_1 cắt C_1D_1 tại P và A_1D_1 cắt B_1C_1 tại Q. Chứng minh rằng :

a) P và Q nằm trên đường thẳng MN ;

b) Các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 đi qua giao điểm các đường chéo AC và BD ;

c) MA + MD + ND + NC = NA + NB + MB + MC ;

d) Nếu tâm của đường tròn nội tiếp nhìn đoạn MN dưới một góc 90^0 thì tứ giác ABCD nội tiếp.

17. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN ngoại tiếp. Chứng minh rằng cặp tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn nội tiếp trong các tam giác BMC và DNC hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng MN.

18. Cho tứ giác toàn phần ABCDMN ngoại tiếp đường tròn tâm I. Kí hiệu A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA. Gọi P là giao điểm của MI và C_1D_1 ; Q là giao điểm của BI và C_1A_1 ; E là giao điểm của NI và A_1B_1 ; F là giao điểm của DI và B_1D_1. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, E, F nằm trên cùng một đường tròn.

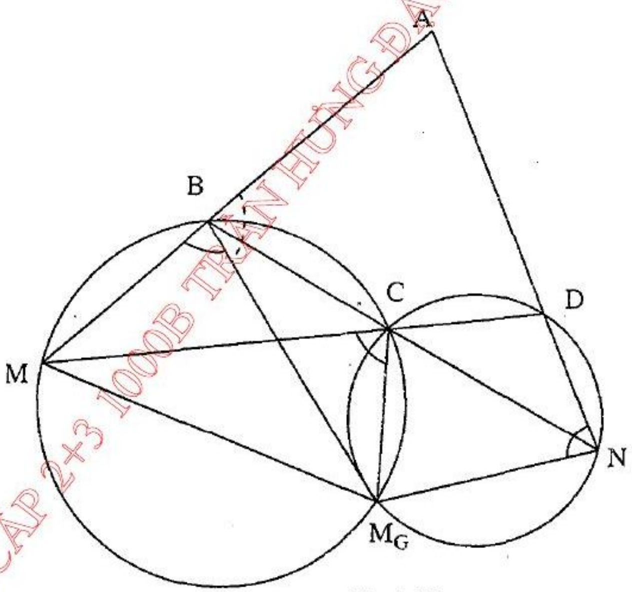
Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Kí hiệu E, F và L tương ứng là các giao điểm của CH_1 với MH_1, của BH_1 với AB, của BC với CD. Khi đó E nằm trên đường tròn đường kính AC ; F nằm trên đường tròn đường kính MN và L nằm trên đường tròn đường kính BD. Phương tích của H_1 đối với các đường tròn đó tương ứng bằng $\overline{H_1E}.\overline{H_1C}$, $\overline{H_1F}.\overline{H_1M}$ và $\overline{H_1B}.\overline{H_1L}$. Vì các tứ giác EBLC, FBLM và EFMC nội tiếp nên các phương tích trên bằng nhau. Tương tự đối với trực tâm của các tam giác còn lại. Từ đó ta suy ra rằng các điểm H_1, H_2, H_3, H_4 nằm đồng thời trên các trục đẳng phương của các cặp đường tròn đường kính AC, BD và đường tròn đường kính AC, MN. Tức là hai cặp đường tròn đó có cùng một trục đẳng phương. Vì trục đẳng phương vuông góc với các đường thẳng IJ và IK nên ba điểm I, J, K thẳng hàng.

b) Nếu tứ giác ABCD nội tiếp và AC cắt BD tại S thì phương tích của S đối với các đường tròn đường kính AC và BD là $\overline{SA}.\overline{SC}=\overline{SB}.\overline{SD}$. Vì vậy S nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đó. Tức là S nằm trên đường thẳng đi qua bốn trực tâm H_1, H_2, H_3, H_4.

2. a) (H.29) Kí hiệu M_G là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MBC và NCD. Ta chứng minh rằng M_G nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN. Vì C nằm trong tam giác AMN, nên M_G nằm trên các cung MC và NC không chứa các đỉnh B và D của hai đường tròn. Ta có

$\widehat{ANM_G}=\widehat{MCM_G}=\widehat{MBM_G}$ và tứ giác ABM_GN là lồi



Hình 29

(vì M_G và A khác phía đối với BN ; B và D khác phía đối với AM_G). Từ đó suy ra tứ giác ABM_GN nội tiếp. Chứng minh M_G nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM tương tự.

b) Đặt $\alpha=\widehat{AMD}$, $\beta=\widehat{ANB}$, theo định lí hàm số sin đối với các tam giác MBC và NDC, ta có $BC=2R_1.\sin\alpha$, $CD=2R_2.\sin\beta$. Tương tự với các tam giác ABN và ADM ta có $AD=2R_3.\sin\alpha$, $AB=2R_4.\sin\beta$. Từ các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

c) Với các tam giác NAC và MAC ta có $AC=2r_1.\sin\alpha=2r_2.\sin\beta$. Với các tam giác NBD và MBD ta có $BD=2r_3.\sin\beta=2r_4.\sin\alpha$. Từ đó ta suy ra điều cần chứng minh.

BỒI DƯỠNG TOÁN LÊ - HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

d) Nếu ABCDMN nội tiếp, nghĩa là ABCD nội tiếp thì tổng các góc tại hai đỉnh B và D của tứ giác này bằng π. Vì vậy $\widehat{CM_GM}+\widehat{CM_GN}=\pi$. Điều này chứng tỏ M_G nằm trên đường thẳng MN. Hơn nữa, M nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác CDN và N nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM, nên M_G nằm giữa hai điểm M và N.

Xét $MM_G^2 - NM_G^2 = \left(\overline{MM_G}+\overline{M_GN}\right)\left(\overline{MM_G}-\overline{M_GN}\right)$

$$= \overline{MN}.\overline{MM_G} - \overline{MN}.\overline{M_GN} = \overline{MN}.\overline{MM_G} - \overline{NM}\,\overline{NM_G}$$

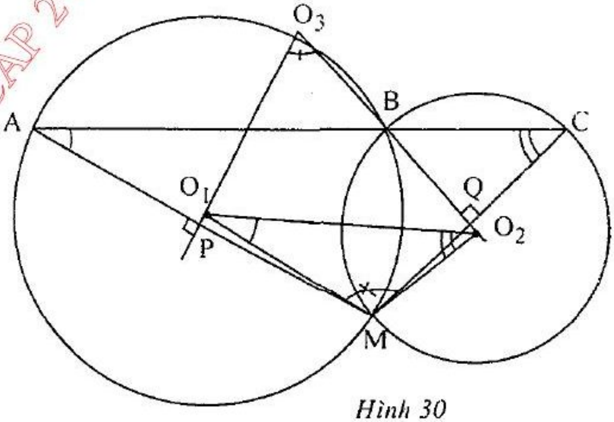
$$= (MO^2 - R^2) - (NO^2 - R^2) = MO^2 - NO^2.$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng đường thẳng OM_G vuông góc với đường thẳng MN.

3. Ta cần bổ đề sau :

Bổ đề. Nếu A, B, C là ba điểm theo thứ tự nằm trên một đường thẳng và M là điểm không thuộc đường thẳng đó thì tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MAC cùng với M nằm trên một đường tròn.

Chứng minh. (H.30). Kí hiệu O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MCA. Khi đó O_1O_3 vuông góc với MA tại P và O_2O_3 vuông góc với MC tại Q. Do đó, hai góc đối tại các đỉnh M và O_3 của tứ giác MPO_3Q bù nhau. Từ điều kiện đồng dạng của tam giác MO_1O_2 và tam giác MAC ta suy ra $\widehat{O_1MO_2}=\widehat{PMQ}$. Vậy tứ giác lồi $MO_1O_3O_2$ có hai góc tại đỉnh M và O_3 bù nhau nên tứ giác này nội tiếp.

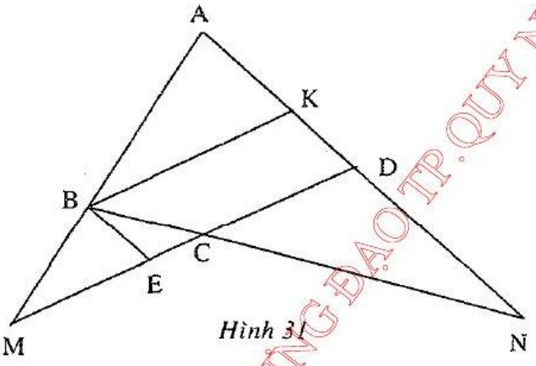


Hình 30

Sử dụng bổ đề trên vào các đường tròn đi qua mỗi bốn điểm A, B, N, M_G ; A, D, M, M_G ; M, C, B, M_G ; N, C, D, M_G. Ta suy ra điều cần chứng minh.

a) Trên đường thẳng AN ta chọn điểm K sao cho BK // DM. Khi đó, đường thẳng ơle của tam giác ABK song song với đường thẳng Ơ-le của tam giác ADM. Theo Bài 12 Chuyên đề 7, vì đường thẳng Ơ-le của tam giác ABN song song với BK nên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABK song song với BN, tức là đường thẳng Ơ-le của ADM song song với BN.

b) (H.31) Lấy trên MC điểm E sao cho BE // AD và lập luận tương tự đối với tam giác BMC và tam giác BEC.



Hình 31

Ta chọn hệ tọa độ Oxy sao cho A(0 ; a), B(b ; 0), N(n ; 0). Giả sử phương trình của đường thẳng DM là y = kx + m. Toạ độ các điểm M và D là nghiệm các hệ phương trình tương ứng

$$\begin{cases}\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1\\ y=kx+m\end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases}\dfrac{x}{n}+\dfrac{y}{a}=1\\ y=kx+m.\end{cases}$$

Gọi E là trung điểm của AN, theo giả thiết BE // DM điều đó tương đương với $\overrightarrow{BE}\left(\frac{n}{2}-b;\frac{a}{2}\right)\perp\vec{u}(k;-1)\Leftrightarrow a=k(n-2b)$ (*). Gọi F là trung điểm của M. Nếu $M(x_1 ; y_1)$ và $D(x_2 ; y_2)$ thì $F\left(\dfrac{x_1}{2};\dfrac{y_1+a}{2}\right)$ và

$$\overrightarrow{DF}\left(\frac{x_1}{2}-x_2;\frac{y_1+a}{2}-y_2\right).$$

Cần chứng minh rằng $\dfrac{y_1+a}{2}-y_2=0$,

trong đó $y_1=\dfrac{a(kb+m)}{a+kb}$, $y_2=\dfrac{a(kn+m)}{a+kn}$.

Ta có $\quad \dfrac{y_1+a}{2}-y_2=0\Leftrightarrow y_1+a=2y_2$

$$\Leftrightarrow \frac{(kb+m)}{a+kb} + 1 = 2.\frac{(kn+m)}{a+kn}$$

$$\Leftrightarrow (2kb + a + m)(a + kn) = (2kn + m)(kb + a)$$

$$\Leftrightarrow 2kab + a^2 + kmn = k.an + am + 2kbm$$

$$\Leftrightarrow a(2kb + a - kn - m) = km(2b - n). \qquad (^{**})$$

Kết hợp với (*) ta suy ra $-am = km(2b - n) \Leftrightarrow a = k(n - 2b)$.

11. a) Ta có $\widehat{BM'M} = \widehat{BDM} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAS} = \widehat{BM'S}$. Các điểm M' và A nằm cùng phía đối với BS nên bốn điểm A, B, S, M' nằm trên cùng một đường tròn. Tương tự, bốn điểm A, D, S, N' nằm trên cùng một đường tròn.

b) Từ $\overline{MS}.\overline{MM'} = \overline{MB}.\overline{MA} \Rightarrow \overline{MS}\left(\overline{MS} + \overline{SN'}\right) = MO^2 - R^2$

$$\Rightarrow MS^2 = \overline{SM}.\overline{SM'} + MO^2 - R^2.$$

Chú ý rằng $\overline{SM}.\overline{SM'} = \overline{SB}.\overline{SD} = SO^2 - R^2$. Thay kết quả này vào vế phải của MS^2 ta được điều cần chứng minh.

Từ $MN^2 = \overline{MN}\left(\overline{MM_G} + \overline{M_GN}\right) = \overline{MN}.\overline{MM_G} + \overline{MNM_GN}$

$$= MO^2 - R^2 + NO^2 - R^2 = MO^2 + NO^2 - 2R^2.$$

c) Xét

$$MS^2 - MN^2 = SO^2 - NO^2 \text{ và } NS^2 - MN^2 = SO^2 - MO^2.$$

Các đẳng thức đó chứng tỏ rằng MO vuông góc với SN và NO vuông góc với SM.

d) Vì PQ đi qua S nên các tiếp tuyến với O tại P và Q cắt nhau tại N' nằm trên MN (theo Bài 2). Từ điều kiện ON và ON' cùng vuông góc với PQ nên ON trùng với ON' kéo theo N trùng với N'.

12. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Rõ ràng MI, MJ là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{AMD}$. Vì vậy MK là đường phân giác của góc $\widehat{IMJ}$. Tương tự, NK là đường phân giác của góc $\widehat{INJ}$. Dễ dàng nghiệm lại rằng tổng số đo các góc tại đỉnh M và N của tam giác KMN bằng 90^0.

13 . Sử dụng tính chất của các đường đẳng giác trong các góc $\widehat{AMD}$ và $\widehat{ANB}$.

14. Dùng kết quả Bài 11 để chứng minh.

15. Xem Bài 10 hoặc sử dụng Bài 7 trong Chuyên đề 1.

17. Kí hiệu (O_1) là đường tròn nội tiếp tam giác BMC, (O_2) là đường tròn nội tiếp tam giác CND. Nếu hai đường tròn đó bằng nhau thì các tiếp tuyến chung ngoài của chúng song song với nhau. Nếu hai đường tròn có bán kính khác nhau thì phép vị tự tâm M biến (O_1) thành (I) và phép vị tự tâm N biến (I) thành (O_2). Tích của hai phép vị tự đó biến (O_1) thành (O_2). Ta biết rằng tích hai phép vị tự là một phép vị tự biến (O_1) thành (O_2) và tâm của phép vị tự đó trùng với giao điểm hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn. Mặt khác, tâm của phép vị tự đó cùng với tâm vị tự M và tâm vị tự N là ba điểm thẳng hàng. Do đó giao điểm các tiếp chung ngoài của hai đường tròn nằm trên MN.

18. Hãy chứng minh rằng các điểm P, Q, E, F lần lượt là hình chiếu của A trên MI, BI, NI, DI.

CHUYÊN ĐỀ 9

ĐIỂM BRÔCAR TRONG TAM GIÁC

Điểm Brôcar được xác định từ các đường tròn tiếp xúc với các cạnh tam giác tại các đỉnh của tam giác đó. Các bài tập dưới đây là các tính chất liên quan đến điểm Brôcar.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm B_r và B^r nằm trong tam giác ABC sao cho

$$\widehat{BCB^r} = \widehat{CAB^r} = \widehat{ABB^r} = \alpha \qquad (1)$$

và
$$\widehat{BAB_r} = \widehat{CBB_r} = \widehat{ACB_r} = \beta. \qquad (2)$$

Các điểm B^r và B_r được gọi là điểm Brôcar của tam giác ABC. (Điểm B_r được gọi là liên hợp đối với điểm B^r. Các góc α và β được gọi là góc Brôcar tương ứng).

2. Sử dụng các kí hiệu của Bài 1, chứng minh rằng

$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C\,.$$

3. Sử dụng các kí hiệu của Bài 1, chứng minh rằng các đường thẳng AB^r và AB_r là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

4. Sử dụng các kí hiệu của Bài 1, chứng minh rằng $\min\left(\frac{\hat{A}}{2};\frac{\hat{B}}{2};\frac{\hat{C}}{2}\right) \le \alpha \le 30^0$.

5. Cho tam giác ABC. Kí hiệu A', B', C' là giao điểm thứ hai của các đường thẳng AB^r, BB^r, CB^r với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng tồn tại phép quay biến tam giác ABC thành tam giác A' B'C'.

6. Cho tam giác ABC. Kí hiệu O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $OB^r = OB_r$.

7. Cho tam giác ABC. Kí hiệu x, y, z lần lượt là các đường thẳng đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của điểm Lemoin L trên x, y, z. Chứng minh rằng các đường thẳng AC_1, BA_1, CB_1 cắt nhau tại điểm Brôcar.

8. Sử dụng giả thiết của Bài 7, chứng minh rằng các điểm B^r và B_r nằm trên đường tròn đường kính OL.

9. Cho tam giác ABC, các điểm B^r và B_r là các điểm Brôcar của tam giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng $B^r B_r$ song song với đường thẳng Lemoine của tam giác ABC.

(*Trên đường thẳng* OL *ta lấy điểm* E *sao cho* $\overline{OE}.\overline{OL} = R^2$, *với* R *là bán kính đường tròn tâm* O. *Đường thẳng vuông góc với* OE *tại* E *là đường thẳng Lemoine*).

10. Giả sử ABC là tam giác nhọn và B_r là điểm Brôcar của tam giác đó. Kí hiệu O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BB_rC, CB_rA, AB_rB. Các giao điểm A', B', C' của AO_1 và O_2O_3, BO_2 và O_3O_1, CO_3 và O_1O_2 tương ứng. Chứng minh rằng

$$\frac{O_1A}{O_1A'} + \frac{O_2B}{O_2B'} + \frac{O_3C}{O_3C'} = 4.$$

11. Giả sử ABC là tam giác nhọn và B_r là điểm Brôcar của tam giác đó. Kí hiệu O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BB_rC, CB_rA, AB_rB. Chứng minh rằng tam giác $O_2O_3O_1$ đồng dạng với tam giác ABC và B_r là điểm Brôcar của tam giác $O_2O_3O_1$.

12. Các đường thẳng AB^r, BB^r, CB^r cắt lần thứ hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Giả sử các tiếp tuyến với đường tròn

tại A và A_1 cắt nhau tại điểm T_1. Tương tự, T_2 là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại B và B_1 ; T_3 lần lượt là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại C và C_1. Chứng minh rằng các điểm T_1, T_2, T_3 nằm trên cùng một đường thẳng. (Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng Brôcar của tam giác ABC ứng với điểm B^r và được kí hiệu bởi $d(B^r)$.

13. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng $d(B^r)$ và $d(B_r)$ của tam giác ABC tạo với đường thẳng Lemoine của tam giác đó những góc bằng nhau.

14. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng $d(B^r)$, $d(B_r)$ và B_rB^r lập thành một tam giác cân.

15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng giao điểm các đường thẳng $d(B_r)$ và $d(B^r)$ nằm trên OL và OL là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

16. Cho tam giác cân ABC với CA = CB. Bên trong tam giác ta lấy điểm P sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Chứng minh rằng $\widehat{APM} + \widehat{BPC} = 180^0$.

(Đề thi vô địch Ba Lan năm 2000).

17. Cho tam giác cân ABC với CA = CB. Chứng minh rằng điểm B^r nằm trên đường trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ A và điểm B_r nằm trên đường trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ B.

18. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là giao điểm của AO và đường cao CF ; Q là giao điểm CO và đường cao BE ; K là giao điểm của BO và đường cao AH. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAC, QBC và KAB cắt nhau tại một điểm.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại B được kí hiệu bằng (O_1). Tương tự, (O_2) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại C, (O_3) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A. Các đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau lần thứ hai tại điểm B^r và ta có

$$\widehat{ABB^r} = \widehat{BCB^r} = \widehat{CAB^r}.$$

Từ đẳng thức đó ta cũng suy ra rằng đường tròn (O_3) đi qua điểm B^r. Ta thấy rằng với cách xác định điểm B^r thì điểm này nằm đồng thời trong các nửa mặt phẳng chứa C bờ AB, chứa B bờ AC, chứa A bờ BC. Tức là B^r nằm trong tam giác ABC. Từ cách dựng điểm B^r, ta suy ra B^r là điểm duy nhất. Từ chứng minh trên ta suy ra rằng các cạnh BC, CA, AB được nhìn từ B^r dưới một góc tương ứng là $\pi - \widehat{B}$, $\pi - \widehat{A}$, $\pi - \widehat{C}$. Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn thì các cạnh của tam giác đó được nhìn từ B^r dưới một góc tù. Tức là các điểm O_1, O_2, O_3 và ba đỉnh tam giác ABC là các đỉnh của một lục giác lồi. Nếu $\pi - \widehat{B} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \widehat{B} > \dfrac{\pi}{2}$ và tam giác BB^rC có góc nhọn thì tâm O_1 nằm trong tam giác đó. Tức là O_1 và A nằm cùng một phía đối với BC. Nếu góc tại đỉnh B trong tam giác BB^rC tù thì O_1 và B khác phía đối với đường thẳng BB^r. Tức là O_1 và A nằm cùng phía đối với BC.

2. Đặt $x = AB^r$, $y = BB^r$, $z = CB^r$, trong tam giác ABB^r ta có

$$x^2 = y^2 + AB^2 - 2y.AB.\cos\alpha = y^2 + AB^2 - 4S_1.\cot\alpha$$

(S_1 là diện tích của tam giác ABB^r). Tương tự, ta có

$$y^2 = z^2 + BC^2 - 4S_2\cot\alpha, \quad z^2 = x^2 + AC^2 - 4S_3\cot\alpha.$$

Bằng cách cộng các kết quả trên ta được

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4(S_1 + S_2 + S_3)\cot\alpha = 4S\cot\alpha \qquad (1)$$

trong đó S là diện tích của tam giác ABC. Sử dụng định lí hàm số sin cho tam giác ABC ta được

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều cần chứng minh.

3. Sử dụng Bài 2 để chứng minh.

4. Giả sử các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện $\widehat{A} \le \widehat{B} \le \widehat{C}$. Kí hiệu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Nếu $\alpha \ge \frac{\widehat{C}}{2} \Rightarrow \alpha \ge \frac{\widehat{B}}{2}$ và B' trong tam giác ABI. Do đó tia AB' nằm trong góc $\widehat{BAI}$ suy ra $\alpha \le \frac{\widehat{A}}{2}$ và $\min\left(\frac{\widehat{A}}{2};\frac{\widehat{B}}{2};\frac{\widehat{C}}{2}\right) \le \alpha$. Nếu $\alpha < \frac{\widehat{C}}{2}$ thì tia CB' nằm trong góc $\widehat{ACI}$. Nếu tia CB' cắt AI tại P thì B' chỉ có thể nằm trên đoạn CP và $\alpha > \frac{\widehat{A}}{2}$. Từ đó ta suy ra $\alpha \ge \min\left(\frac{\widehat{A}}{2};\frac{\widehat{B}}{2};\frac{\widehat{C}}{2}\right)$.

Ta xét trường hợp $\widehat{C} < 90^0$. Trong trường hợp này ta có các bất đẳng thức :

$$\cot A + \cot B > 2\cot\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) \text{ và } \cot\widehat{C} + \cot 60^0 > 2\cot\left(\frac{\widehat{C}+60^0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C + \cot 60^0 > 2\cot\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} + 2\cot\frac{\widehat{C}+60^0}{2}.$$

Vì $\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} < 90^0$ và $\frac{\widehat{C}+60^0}{2} < 90^0$

$$\Rightarrow \cot\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} + \cot\frac{\widehat{C}+60^0}{2} > 2\cot\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+60^0}{4}$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C + \cot 60^0 > 4\cot 60^0.$$

Theo kết quả Bài 3 ta có $\cot\alpha > \sqrt{3} \Rightarrow \alpha < 30^0$. Nếu $\widehat{C} = 90^0$, ta cần chứng minh rằng $\cot A + \cot B > \sqrt{3}$. Thật vậy, ta có

$$\cot A + \cot B = \cot A + \tan A > 2 > \sqrt{3}.$$

Nếu $\widehat{C} > 90^0$ thì $\cot A + \cot B + \cot C > 2\cot\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) + \cot C = 2\tan\frac{C}{2} + \cot C$

$$= 2\tan\frac{C}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\tan\frac{C}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) > \sqrt{3} \Rightarrow \cot\alpha > \sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi AB = AC = BC.

5. Đặt $\alpha = \widehat{CAB'}$, ta có $\widehat{COA'} = \widehat{BOC'} = \widehat{AOB'} = 2\alpha$. Vì A' nằm trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không đi qua điểm A ; B' trên cung $\overset{\frown}{AC}$ không đi qua B ; C' trên cung $\overset{\frown}{AB}$ không qua C nên phép quay tâm O với góc quay 2α biến A thành B' thì nó biến C thành A' và B thành C'.

7. Dễ dàng thấy rằng các khoảng cách từ A_1 và L đến BC, từ B_1 và L tới AC, từ C_1 và L tới AB bằng nhau, do đó $\widehat{C_1AB} = \widehat{A_1BC} = \widehat{B_1CA}$. Vì LC_1 // AB nên tia AC_1 nằm trong góc BAL. Vì tia AL nằm trong góc $\widehat{BAC}$ nên tia AC_1 nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Tương tự, tia BA_1 nằm trong góc $\widehat{ABC}$ và tia CB_1 nằm trong góc $\widehat{ACB}$. Ta sẽ chứng minh rằng các tia AC_1, BA_1, CB_1 đồng quy. Gọi M là giao điểm của các đường thẳng AC_1 và BA_1, ta thấy rằng $\widehat{AMA_1} = \widehat{C_1MA_1} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C_1LA_1} = 180^0 - \widehat{ABC}$ do đó tập hợp điểm $\{M. C_1, L, A_1\}$ nằm trên cùng một đường tròn. Mặt khác, các điểm A_1, B_1, C_1 nằm trên đường tròn đường kính OL. Vì vậy M nằm trên đường *tròn đường kính* OL và $\widehat{LA_1M} = \widehat{LB_1M}$. Từ $\widehat{LA_1M} = \widehat{A_1BC} = \widehat{B_1CA}$, ta được $\widehat{LB_1M} = \widehat{B_1CA}$. Hơn nữa, ta có B_1L // AC từ đó ta suy ra rằng các điểm C, B_1, M thẳng hàng. Vì M nằm trong tam giác ABC do đó M là điểm Brôcar.

10. Rõ ràng đường tròn ngoại tiếp tam giác BB_rC tiếp xúc với AC tại C và $\widehat{CBO_1} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_rB tiếp xúc với BC tại B, nên ta có

$$\widehat{O_1BO_3} = \widehat{O_1BC} + \widehat{CBO_3} = \pi - \hat{B} < \pi.$$

Tương tự, ta có $\widehat{O_1CO_2} < \pi$ và $\widehat{O_2AO_3} < \pi$. Vì vậy đa giác $AO_2CO_1BO_3$ là lồi và các điểm A', B', C' thuộc các đoạn O_1A, O_2B, O_3C. Vì điểm B_r đối xứng với A qua đường thẳng O_2O_3 nên diện tích tam giác AO_2O_3 bằng diện tích tam giác $B_rO_2O_3$. Ta có $\dfrac{O_1A}{O_1A'} = 1 + \dfrac{AA'}{O_1A'} = 1 + \dfrac{B_rA'}{O_1A'} = 1 + \dfrac{S_{\Delta O_2B_rO_3}}{S_{\Delta O_1O_2O_3}}$.

Vì B_r nằm trong tam giác $O_1O_2O_3$ nên $\dfrac{S_{\Delta O_2B_rO_3}}{S_{\Delta O_1O_2O_3}} + \dfrac{S_{\Delta O_3B_rO_1}}{S_{\Delta O_1O_2O_3}} + \dfrac{S_{\Delta O_1B_rO_2}}{S_{\Delta O_1O_2O_3}} = 1$. Đây là điều cần chứng minh.

11. Các tam giác O_1BC, O_2CA, O_3AB được dựng về phía ngoài của tam giác ABC. Phép quay với tâm O_3 biến B thành A, phép quay tâm O_2 biến A thành C. Vì vậy các góc của phép quay đó lần lượt bằng 2B và 2A ; O_1 là tâm của phép quay biến B thành C. Từ đó ta suy ra các góc của tam giác $O_1O_2O_3$ tại các đỉnh O_1, O_2, O_3 lần lượt bằng $\widehat{C}, \widehat{A}, \widehat{B}$. Ta có

$$O_1C = \frac{a}{2\sin C} = R\frac{a}{c},\ O_2C = \frac{b}{2\sin A} = R\frac{b}{a},\ \widehat{O_1CO_2} = \pi - \widehat{A}.$$

Theo định lí hàm số côsin đối với tam giác O_1CO_2 ta được

$$O_1O_2^2 = R^2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2\frac{b}{c}\cos A\right).$$

Kí hiệu k là tỉ số đồng dạng, ta có

$$k = \frac{O_1O_2}{AC} \Rightarrow k = R\sqrt{\frac{a^2}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{2\cos A}{bc}},$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác đó. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của O_1O_3 và BB_r, O_2O_1 và CB_r. Ta có

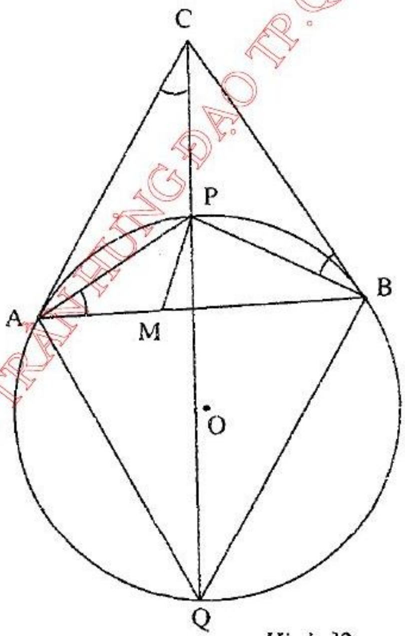
$$\widehat{PO_1Q} + \widehat{PB_rQ} = \hat{C} + \pi - \hat{C} = \pi$$

do đó O_2PB_rQ là tứ giác nội tiếp và ta có $\widehat{PO_1B_r} = \widehat{PQB_r}$. Vì P và Q là trung điểm của các đoạn thẳng B'C và B'B nên PQ // BC và $\widehat{PQB_r} = \widehat{CBB_r}$. Tức là $\widehat{O_2O_1B_r} = \widehat{CBB_r}$.

Tương tự, ta có $\widehat{O_3O_2B_r} = \widehat{ACB_r}$ và $\widehat{O_1O_3B_r} = \widehat{BAB_r}$. Đây là điều cần chứng minh. Kết quả trên vẫn đúng khi tam giác ABC có một góc tù.

13. Thật vậy, vì OL vuông góc với đường thẳng Lemoine và OB_r vuông góc với $d(B_r)$ nên góc tạo bởi đường thẳng Lemoine và $d(B_r)$ bằng $\widehat{B_rOL} = \alpha$.

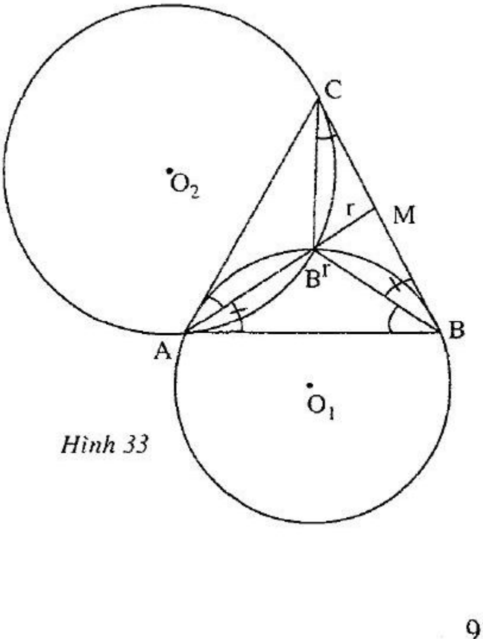
16. (H.32) Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với hai cạnh CA và CB tại các đỉnh A và B. Điểm P nằm trên đường tròn này (P là điểm Brocar trong tam giác ABC). Kéo dài CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB tại Q. Đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác APBQ có các tiếp tuyến với (O) tại A và B cắt nhau trên PQ nên tứ giác này có tích các cặp cạnh đối bằng nhau, do đó PM và PQ là các đường đối trung kẻ từ P thuộc góc $\widehat{APB}$. Theo tính chất của các đường đối trung ta có $\widehat{APM} = \widehat{BPQ}$. Vì góc $\widehat{BPQ}$ và góc $\widehat{BPC}$ bù nhau nên ta suy ra điều cần chứng minh.



Hình 32

17. (H.33) Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABB^r và ACB^r. Giao điểm của AB^r và BC là M. Vì (O_2) tiếp xúc với BC tại C nên $MC^2 = MB^r.MA$. Do tam giác ABC cân tại C và

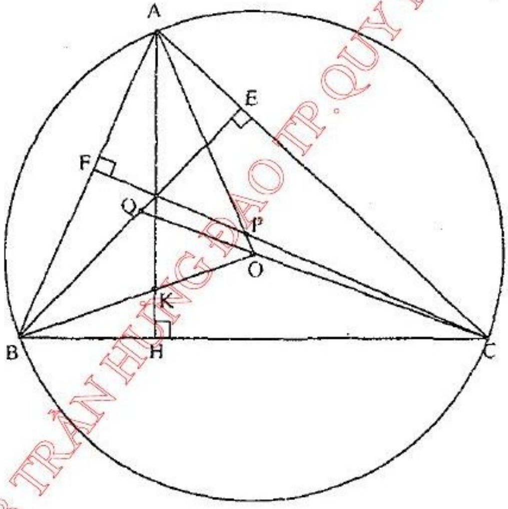
$\widehat{CAB^r} = \widehat{ABB^r}$ nên $\widehat{BAB^r} = \widehat{CBB^r}$.



Hình 33

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB' tiếp xúc với BC tại B nên $MB^2 = MB'.MA$. Từ các kết quả trên ta suy ra MB = MC và AM là trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ A.

18. (H.34) Vì CO và CF là cặp đường đẳng giác kẻ từ C của góc $\widehat{ACB}$ nên các góc $\widehat{ACP}$ và $\widehat{BCF}$ bằng nhau. Tương tự cặp đường thẳng AO và AH ; BO và BE là các đường đẳng giác tương ứng kẻ từ A và B.



Hình 34

Từ $\widehat{BCF} = \widehat{BAH} = \widehat{CAP}$ suy ra BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác PAC tại C. Tương tự, ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác QBC tiếp xúc với AB tại B và đường tròn ngoại tiếp tam giác KAB tiếp xúc với AC tại A. Điều đó chứng tỏ rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAC, QBC, KAB cùng đi qua một điểm brôcar trong tam giác ABC.

CHUYÊN ĐỀ 10

ĐƯỜNG THẲNG BIẾN THIÊN ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Các bài toán trong chuyên đề này thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp và là một chuyên đề khó. Thông qua 25 bài toán được trình bày dưới dạng ví dụ và bài tập, bạn đọc có thể nắm được các phương pháp giải loại toán này.

Bài toán : *Cho điều kiện X. Xét đường thẳng **d** thay đổi thỏa mãn điều kiện X. Chứng minh rằng **d** đi qua một điểm cố định.*

Nội dung của điều kiện X rất đa dạng. Dựa vào điều kiện X ta có thể đưa ra một số phương pháp tìm điểm cố định mà d đi qua. Có thể tìm điểm cố định bằng một trong các cách sau đây :

i) Đoán nhận điểm cố định bằng một số điểm đặc biệt, chẳng hạn trực tâm, trọng tâm, tâm các đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp tam giác có tính chất cố định, trung điểm của một đoạn thẳng cố định ...

ii) Xét một số vị trí đặc biệt của d để tìm điểm cố định.

iii) Liên hệ giữa bài toán này với một số bài toán chứng minh sự thẳng hàng của ba điểm hoặc tính đồng quy của ba đường thẳng.

*iv) Sử dụng các phép biến hình để chỉ ra rằng nếu ảnh của một đường thẳng d đi qua một điểm cố định thì **d** đi qua 1 điểm cố định.*

v) Dùng phương pháp toạ độ : Chọn hệ toạ độ và viết phương trình đường thẳng d trong hệ toạ độ đó. Sử dụng cách tìm điểm cố định của d bằng phương pháp đại số.

vi) Dùng điều kiện đồng phương của hai vectơ. Điều kiện đó được phát biểu bằng một mệnh đề sau đây.

Mệnh đề. *Cho ba điểm* O, A, B *không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để* M *nằm trên đường thẳng AB là tồn tại các số thực* x, y *sao cho* $x + y = 1$ *và* $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho góc $\widehat{xOy}$ và các độ dài a, b. Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm A, B thoả mãn điều kiện $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} = 1$. Chứng minh rằng khi các điểm A, B thay đổi thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định.

Lời giải 1. Giả sử M là điểm trên đoạn AB. Lần lượt lấy trên các tia OA, OB các điểm P, Q sao cho MP // OB và MQ // OA. Trong tam giác OAB ta có

$$\frac{OP}{OA} = \frac{BM}{AB}, \frac{OQ}{OB} = \frac{AM}{AB}, \Rightarrow \frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} = \frac{BM}{AB} + \frac{AM}{AB} = 1. \qquad (*)$$

Nếu ta chọn OP = a và OQ = b thì đẳng thức (*) phù hợp với điều kiện đã cho. Vì OP và OQ cố định nên M là điểm cố định.

Lời giải 2. Nếu M là điểm trên đường thẳng AB thì tồn tại các số thực x, y sao cho $x + y = 1$ và $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$. Ta chọn $x = \frac{a}{OA}$ và $y = \frac{b}{OB}$, khi đó vectơ $\overline{OA'} = \frac{a}{OA}\overline{OA}$ có độ dài bằng $\left|\frac{a}{OA}\overline{OA}\right| = \frac{a}{OA}\left|\overline{OA}\right| = a$. Tương tự $\overline{OB'} = \frac{b}{OB}\overline{OB}$ có độ dài b. Vì vậy M là điểm cố định.

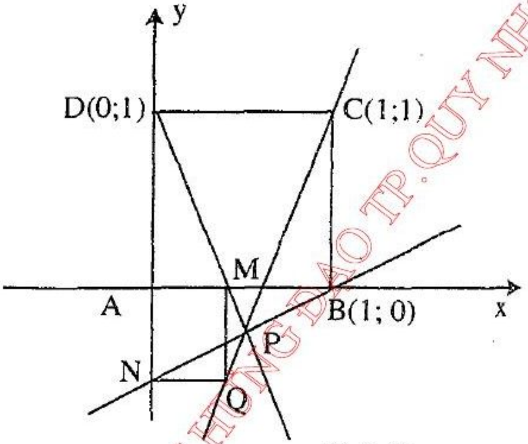
Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD. Xét các điểm M và N lần lượt trên các đường thẳng AB và AD sao cho các đường thẳng DM và BN cắt nhau tại P khác A ; dựng hình chữ nhật AMQN. Chứng minh rằng khi các điểm M và N thay đổi thì đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

Lời giải. (H.35) Chọn hệ toạ độ sao cho A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1), C(1 ; 1). Khi đó ta xét các điểm M(m ; 0) và N(0 ; n) với $m \neq 0, n \neq 0$. Phương trình các đường thẳng DM và BN là $x + my - m = 0$ và $nx + y - n = 0$. Nếu P là giao điểm của DM và BN thì mọi đường thẳng đi qua P có phương trình là $\alpha(x + my - m) + \beta(nx + y - n) = 0, (\alpha^2 + \beta^2 > 0)$.

Đường thẳng PC có phương trình là :

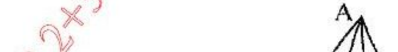
$(x + my - m) - (nx + y - n) = 0.$

Dễ dàng thấy rằng toạ độ của Q(m ; n) là nghiệm của phương trình đường thẳng PC. Do đó Q thuộc đường thẳng PC. Tức là PQ đi qua C (1 ; 1) cố định.



Hình 35

Ví dụ 3. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm A cố định trên tia Ox. Với mỗi điểm B thuộc tia Oy ta dựng đường tròn nội tiếp tam giác OAB tiếp xúc với cạnh OB tại N và tiếp xúc với cạnh AB tại M. Chứng minh rằng khi B thay đổi trên tia Oy thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.



Hình 36

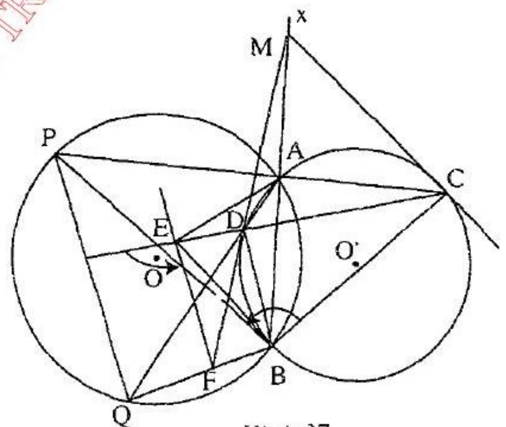
Lời giải. (H.36) Ta chọn B' trên Oy sao cho OB' = OA. Nếu B trùng với B' thì tam giác OAB cân tại O và M trùng với giao điểm M' của phân giác góc $\widehat{xOy}$ và AB'. Điểm M' cố định. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng MN đi qua M' với mọi B trên tia Oy khác B'. Điều này tương đương với việc chứng minh ba điểm M, N, M' thẳng hàng. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB, các điểm M và M' cùng nhìn đoạn AI dưới một góc vuông, nên tứ giác AIMM' nội tiếp. Giả sử M nằm ở miền trong của góc $\widehat{B'OM'}$, khi đó N và M' khác phía đối với AB. Ta có $\widehat{AMM'} = \widehat{AIM'} = \widehat{IAO} + \widehat{IOA}$, $\widehat{IMN} = \widehat{IBM}$.

Vì $\widehat{IAO} + \widehat{IOA} + \widehat{IBM} = 90^0$, suy ra $\widehat{AMI} + \widehat{AMM'} + \widehat{IMN} = 180^0$.

Điều này chứng tỏ ba điểm N, M, M' thẳng hàng. Trường hợp M nằm ở miền trong góc $\widehat{AOM'}$ lập luận tương tự.

Ví dụ 4. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên tia đối Ax của tia AB ta lấy điểm M. Từ M kẻ tới đường tròn (O') hai tiếp tuyến MC và MD (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong (O)). Đường thẳng AC cắt (O) lần thứ hai tại P và AD cắt (O) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên tia Ax.

Lời giải. (H.37) Ta có $\widehat{PBQ} = \widehat{PAQ}$ (cùng chắn một cung) và $\widehat{CBD} = \widehat{PAQ}$ nên ta suy ra $\widehat{PBQ} = \widehat{CBD}$.



Hình 37

Mặt khác $\widehat{BCD} = \widehat{BAQ} = \widehat{BPQ}$, do đó các tam giác BPQ và tam giác BCD đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $\frac{BP}{BC} = \frac{R}{R'}$. Gọi E là giao điểm của CD và BP ; F là giao điểm của MD và BQ. Dễ thấy rằng tứ giác BDEF nội tiếp nên $\widehat{BDF} = \widehat{BEF}$, $\widehat{BEF} = \widehat{BCD} = \widehat{BPQ}$. Vì vậy góc $\widehat{BEF} = \widehat{BPQ}$ và ta có EF // PQ. Cũng từ tứ giác BDEF nội tiếp, phép quay tâm B với góc quay $\widehat{CBP}$ biến đường thẳng CD thành đường thẳng C'D' // EF. Do đó C'D' // PQ. Phép vị tự tâm B với hệ số $k = \frac{BP}{BC} = \frac{R}{R'}$ biến đường thẳng C'D' thành đường thẳng PQ. Ta biết rằng các tiếp tuyến tại C và D với (O') cắt nhau trên AB nên các tiếp tuyến với (O') tại A và B cắt nhau trên CD. Vì giao điểm này cố định, do đó ảnh của nó qua phép đồng dạng là điểm cố định nằm trên PQ.

BÀI TẬP

1. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm A cố định trên tia Ox. Với mỗi điểm B thuộc tia Oy ta dựng đường tròn bàng tiếp tam giác OAB tiếp xúc với cạnh OB tại N và đường thẳng AB tại M. Chứng minh rằng khi B thay đổi trên tia Oy thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.
2. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia CB ta lấy điểm D sao cho các đường tròn nội tiếp của hai tam giác ABD và ACD cắt nhau tại hai điểm phân biệt P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định khi D thay đổi.
3. Cho góc $\widehat{xOy}$ và các độ dài a, b. Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm A, B thoả mãn điều kiện $\frac{a}{OA} - \frac{b}{OB} = 1$. Chứng minh rằng khi các điểm A, B thay đổi thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định.
4. Cho góc $\widehat{xOy}$ và độ dài a. Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm A, B thoả mãn điều kiện OA + OB = a. Chứng minh rằng khi các điểm A, B thay đổi đường trung trực của đoạn thẳng AB đi qua một điểm cố định.
5. Cho góc $\widehat{xOy}$ và độ dài a. Trên hai cạnh của góc ta lấy các điểm A, B thoả mãn điều kiện OA – OB = a. Chứng minh rằng khi các điểm A, B thay đổi sao cho $a \leq OA \leq 2a$ thì đường trung trực của đoạn thẳng AB đi qua một điểm cố định.
6. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có đường chéo BD cố định và khác đường kính. Các đỉnh A, C thay đổi sao cho AB > BC, AD > CD và các đường phân giác của các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên đường chéo AC. Chứng minh rằng đường thẳng AC đi qua một điểm cố định.
7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Một đường thẳng đi qua A cắt hai đường tròn lần thứ hai tại các điểm M, N. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng MN đi qua một điểm cố định, khi đường thẳng MN thay đổi.
8. Cho tam giác ABC không vuông nội tiếp đường tròn (O) có cạnh BC cố định, đỉnh A thay đổi trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Gọi (S_1) là đường tròn đi qua B tiếp xúc

với AC tại A ; (S_2) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A. Hai đường tròn (S_1) và (S_2) cắt nhau lần thứ hai tại D. Chứng minh rằng đường thẳng AD đi qua một điểm cố định.

9. Cho đường thẳng d và đường tròn (O) không có điểm chung với d. Trên d ta lấy điểm A cố định. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm B cố định. Với mỗi điểm M trên d (không trùng với A) ta dựng đường tròn đi qua ba điểm M, A, B. Đường tròn đó cắt (O) tại điểm N khác B. Chứng minh rằng khi M thay đổi *trên d thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.*

10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung BC không chứa đỉnh A ta lấy điểm M. Gọi M_1, M_2 là các điểm đối xứng với M qua các đường thẳng AB, AC. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cung đó thì đường thẳng M_1M_2 đi qua một điểm cố định.

11. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác. Các điểm P, Q là giao điểm của các đường thẳng BH ; CH với đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta lấy điểm M. Đường thẳng MP cắt AC tại K ; đường thẳng MQ cắt AB tại L. Chứng minh rằng đường thẳng KL đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên cung đó.

12. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định. Với mỗi điểm C thuộc đường tròn (khác A, B) ta dựng đường thẳng d đi qua C và vuông góc với AB. Gọi d' là đường thẳng đối xứng với d qua phân giác của góc $\widehat{ACB}$. Chứng minh rằng d' đi qua một điểm cố định khi C thay đổi trên đường tròn và khác A, B.

13. Cho đường thẳng d và đường tròn (O) không có điểm chung với d. Với mỗi điểm M trên d ta dựng các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên d thì đường thẳng AB đi qua một điểm cố định.

b) Gọi H, P, Q lần lượt là hình chiếu của tâm đường tròn trên d, của H trên các đường thẳng MA, MB. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên d thì đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

14. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Trên các cạnh BC, CA, AB ta lấy lần lượt các điểm M, P, Q sao cho MP // AB và MQ // AC. Gọi N là điểm đối xứng với M qua PQ. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh BC thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

15. Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. Đường tròn (O) đi qua hai điểm A và C có tâm không nằm trên đường thẳng AC ; P là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại A và C ; Q là giao điểm của đoạn thẳng PB và đường tròn (O). Chứng minh rằng tiếp tuyến với đường tròn (O) tại Q đi qua một điểm cố định khi (O) thay đổi.

16. Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng AB và AC ta lấy lần lượt các điểm M và N sao cho các đường thẳng CM và BN cắt nhau tại điểm P khác A ; Q là đỉnh hình bình hành dựng trên hai cạnh AM và AN. Chứng minh rằng khi các điểm M và N thay đổi trên các đường thẳng AB và AC thì đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

17. Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường tròn

$$x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0 \text{ và } x^2 + y^2 - 4(m + 3)y - 6 = 0$$

với m là tham số tuỳ ý. Chứng minh rằng hai đường tròn đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m và đường thẳng được xác định bởi hai điểm đó luôn đi qua một điểm mà toạ độ không phụ thuộc vào tham số m.

18. Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường tròn $x^2 + y^2 - 2mx + 2ny + 2n = 0$ và $x^2 + y^2 - 2nx - 2my - 3m = 0$ $(m^2 + n^2 > 0)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm mà toạ độ không phụ thuộc các tham số m và n.

19. Trên hai cạnh AB và AC của tam giác ABC ta lấy các điểm tương ứng P và Q sao cho $\dfrac{AB}{AP} + \dfrac{AC}{AQ} = k$, trong đó k là một số dương cho trước. Chứng minh rằng khi các điểm P và Q thay đổi thì đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

20. Cho tam giác ABC. Xét các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho A_1B_1 // AB và A_1C_1 // AC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A_2, B_2, C_2. Gọi P là giao điểm của A_1C_1 và A_2B_2 ; Q là giao điểm của A_1B_1 và A_2C_2. Chứng minh rằng khi A_1 thay đổi trên cạnh BC sao cho các điều kiện trên vẫn được thoả mãn thì đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

21. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và AC ta lấy các điểm tương ứng P và Q sao cho PQ // BC. Với mỗi điểm M trong tam giác APQ đoạn thẳng MB và MC cắt PQ lần lượt tại các điểm K và H. Hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MPH và MQK cắt nhau lần thứ hai tại N. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trong tam giác APQ.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp ; Q là giao điểm của OJ và MN. Chứng minh rằng Q là hình chiếu vuông góc của A trên OJ.

2. Gọi M, N là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABD tương ứng trên BD và AD ; E và F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ACD tương ứng trên CD và AD. Theo kết quả của Bài 1. MN và EF lần lượt đi qua các điểm cố định Q và S. Cũng từ Bài 1, ta suy ra rằng đường thẳng QS đi qua trung điểm các cạnh AB và AC. Đường thẳng PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn nên PQ đi qua trung điểm của đoạn ME. Vì MN, EF và PQ cùng vuông góc với đường phân giác của góc $\widehat{BDA}$ nên MN // PQ // EF nên PQ đi qua trung điểm của QS.

3. Lấy trên tia OA điểm M sao cho OM = a và trên tia đối của tia OB lấy điểm N sao cho ON = b. Dựng hình bình hành OMDN. Hãy chứng minh rằng AB đi qua D.

6. Kí hiệu A_1, B_1 là các điểm sao cho $OA_1 = OB_1 = a$. Tam giác OA_1B_1 cân tại O, nên phân giác của góc $\widehat{A_1OB_1}$ là trung trực của A_1B_1. Nếu ta chọn A_2 trên Ox sao cho $OA_2 = 2a$ thì từ điều kiện $OA_2 + OB_2 = 2a$ điểm B_2 trùng với O. Đường thẳng vuông góc với OA_2 tại A_1 là đường trung trực của đoạn A_2B_2. Gọi I là giao điểm của đường thẳng đó với phân giác của góc $\widehat{A_1OB_1}$. Xét hai điểm A trên OA_2 và B trên Oy bất kỳ và giả sử OA > OB. Khi đó A nằm trên đoạn A_1A_2 và B nằm trên đoạn OB_1. Ta cần chứng minh rằng IA = IB. Hai tam giác IA_2A và IOB có $IA_2 = IO$, $\widehat{IOB} = \widehat{IA_2B}$, $A_2A = 2a - OA = OB$. Vì vậy chúng bằng nhau, theo đó là IA = IB.

7. Kí hiệu A_1, A_2, B_2 là các điểm trên Ox và Oy sao cho $OA_1 = a = OB_2$, $OA_2 = 2a$. Nếu A trùng với A_1 thì B trùng với O. Đường trung trực của đoạn OA_1 trùng với trung trực của AB. Nếu A trùng với A_2 thì B trùng với B_2. Gọi J là giao điểm hai trung trực của hai đoạn thẳng OA_1 và A_2B_2, khi đó J là điểm cố định. Xét điểm A bất kỳ thuộc đoạn A_1A_2, khi đó B nằm trên OB_2. Hai tam giác JA_1A_2 và JOB_2 có $JA_2 = JB_2$, $JA_1 = JO$ và $A_1A_2 = OB_2$. Vì vậy hai tam giác đó bằng nhau và $\widehat{JA_1A_2} = \widehat{JOB_2}$. Xét điểm A bất kỳ thuộc đoạn

A_1A_2 khi đó $a < OA < 2a$. Vì $OA = OB + a < 2a$ nên $OB < a$ và B thuộc đoạn OB_2. Từ $A_1A = OA - OA_1 = OA - a = OB$ ta suy ra hai tam giác JOB và JA_1A bằng nhau (c.g.c) kéo theo JB = JA. Điều đó chứng tỏ J nằm trên đường trung trực của đoạn AB.

14. Dễ dàng thấy rằng P là tâm đường tròn đi qua ba điểm M, N, C. Vì vậy $\widehat{MNC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Tương tự, ta có $\widehat{MNB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Vì vậy MN là phân giác của $\widehat{BNC}$. Mặt khác, số đo của góc $\widehat{BNC}$ bằng số đo góc $\widehat{BAC}$; các điểm A, N nằm cùng phía đối với BC do đó N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng MN cắt đường tròn đó tại điểm cố định.

16. Thực hiện phép co – dãn bằng trục BC, tam giác ABC thành tam giác vuông A'BC. Thực hiện tiếp phép co – dãn bằng trục A'B, biến tam giác A'BC thành tam giác vuông cân A'BC', khi đó các điểm M, N, P, Q thành các điểm M', N', P', Q'. Ta cần chứng minh rằng đường thẳng P'Q' đi qua một điểm cố định.

17. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4(m+3)y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0 \\ x + 2(m+3)y + 2 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Hệ (*) gồm phương trình của một đường tròn với tâm (–1 ; 0) và bán kính $R = \sqrt{3}$ và một đường thẳng. Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng là $\frac{1}{\sqrt{4(m+3)^2+1}}$. Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{4(m+3)^2+1}} < \sqrt{3}$ đúng với mọi m. Do đó đường thẳng luôn cắt đường tròn và hệ (*) có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Tức là hai đường tròn cắt nhau với mọi m. Rõ ràng đường thẳng $x + 2(m + 3)y + 2 = 0$ đi qua các giao điểm của hai đường tròn. Đường thẳng đó đi qua điểm (–2 ; 0).

18. Đường thẳng AB có phương trình :

$$2n(-x + y + 1) + 2m(-x + y + \frac{3}{2}) = 0.$$

Đây là phương trình của một chùm đường thẳng. Tâm của chùm đường thẳng này là điểm có toạ độ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ -x + y + \dfrac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

19. Giả sử AC > AB và R là điểm cố định mà PQ đi qua. AR cắt BC tại M. Trên AM ta chọn các điểm E và F sao cho BE // CF // PQ.

Ta có $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AE}{AR}$ và $\dfrac{AC}{AQ} = \dfrac{AF}{AR}$ vì vậy

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = \frac{AE + AF}{AR} = k \Leftrightarrow \frac{AM - ME + AM + MF}{AR} = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{2AM + MF - ME}{AR} = k.$$

Nếu ta chọn M là trung điểm của BC thì tử số của vế trái biểu thức trên không đổi, kéo theo AR có độ dài không đổi và R là điểm cố định.

20. Hãy chứng minh rằng P, Q nằm trên đường đối trung kẻ từ A của tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của AM và PQ.

21. Hãy chứng minh rằng I là điểm cùng phương tích đối với hai đường tròn.

CHUYÊN ĐỀ 11

ĐƯỜNG TRÒN BIẾN THIÊN ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Bài toán : Cho một đường tròn biến thiên thoả mãn điều kiện X cho trước. Chứng minh rằng đường tròn đó đi qua một điểm cố định.

Phương pháp tìm điểm cố định mà các đường tròn đi qua tương tự như phương pháp tìm điểm cố định mà các đường thẳng đi qua.

BÀI TẬP

1. Cho $\widehat{xOy} = \alpha$ $(0 < \alpha < 180^0)$ và số $a > 0$. Xét các điểm A, B lần lượt nằm trên các cạnh Ox và Oy của góc và thoả mãn điều kiện OA + OB = a. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC đi qua một điểm cố định thứ hai (khác O).
2. Cho $\widehat{xAy} = \alpha$ $(0 < \alpha < 180^0)$ và số $a > 0$. Xét các điểm B, C lần lượt nằm trên các cạnh Ax và Ay của góc thoả mãn điều kiện AB – AC = a. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua một điểm cố định thứ hai khác A.
3. Cho đoạn thẳng AB. Trên đoạn AB ta lấy điểm H sao cho HA ≠ HB. Trên nửa đường thẳng vuông góc với AB tại H ta lấy điểm C sao cho $\widehat{ACB} < 90^0$. Các điểm M và N là chân các đường cao tam giác ABC nằm trên BC và AC. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AB tại K. Đường thẳng đi qua H và song song với MN cắt AC tại P và BC tại Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQK đi qua hai điểm mà không phụ thuộc vào vị trí của C trên nửa đường thẳng vuông góc với AB tại H.

4. Cho tam giác ABC và các số dương m, n, p. Xét tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh A_1, B_1, C_1 nằm tương ứng trên cạnh BC, CA, AB thoả mãn điều kiện $A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = m : n : p$. Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 có một điểm chung cố định.
5. Cho hình vuông ABCD và một đường thẳng d không đi qua đỉnh và tâm O của hình vuông. Với mỗi điểm M trên d ta kí hiệu A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D trên MB, MC, MD, MA. Chứng minh rằng bốn điểm A', B', C', D' nằm trên cùng một đường tròn và đường tròn này đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên d.
6. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên tia đối Ax của tia AB ta lấy điểm M. Từ M kẻ tới đường tròn (O') hai tiếp tuyến MC và MD (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong (O)). Đường thẳng AC cắt (O) lần thứ hai tại P và AD cắt (O') lần thứ hai tại Q. Gọi H là giao điểm của CD và PQ. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác DHQ và CPH đi qua cùng một điểm cố định khi M thay đổi trên Ax.
7. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ta lấy lần lượt các điểm P, Q, R sao cho PQ // AB và PR // AC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AQR đi qua một điểm cố định khác A khi P thay đổi trên cạnh BC.

(Đề thi chọn đội tuyển Mỹ năm 2008).

8. Cho tứ giác lồi ABCD có BC = AD và đường thẳng BC không song song với AD. Giả sử E và F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC và AD sao cho BE = DF. Kí hiệu P là giao điểm của AC và BD. Q và R lần lượt là các giao điểm của BD và AC với EF. Chứng minh rằng khi E và F thì đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua một điểm cố định khác P.

(Đề thi vô địch toán quốc tế năm 2005)

9. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Kí hiệu (O_1), (O_2), (O_3) tương ứng là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CB_1A_1. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác, đường thẳng MA cắt (O_1) lần thứ hai tại A_2 ; MB cắt (O_2) lần thứ hai tại B_2 ; MC cắt (O_3) lần thứ hai tại C_2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ luôn đi qua một điểm không phụ thuộc vào vị trí của M.

10. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm P và Q. Một đường thẳng đi qua P cắt (O) và (O') lần thứ hai tương ứng tại A và C. Một đường thẳng khác đi qua P cắt (O) và (O') lần thứ hai tương ứng tại B và D ; AB và CD cắt nhau tại K. Chứng minh rằng :

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK đi qua một điểm cố định và đường tròn ngoại tiếp tam giác BDK đi qua một điểm cố định khi các cát tuyến AC và BD quay quanh P.

b) Nếu các cát tuyến AC và BD quay quanh P sao cho AD đi qua Q thì đường tròn ngoại tiếp tam giác KCB đi qua một điểm cố định.

11. Trong hệ toạ độ vuông góc Oxy cho parabol $y = x^2 + px + q$ sao cho đường cong này cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B và cắt Oy tại C. Chứng minh rằng khi p và q thay đổi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua một điểm cố định.

(Đề thi vô địch toán Tây ban nha năm 1997).

12. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) với góc tại đỉnh A là góc tù. Trên tia đối với của AC ta lấy điểm D. Đường thẳng song song với AB và đi qua D cắt đường thẳng BC tại E. Đường thẳng song song với AD và đi qua E cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF đi qua một điểm cố định thứ hai khác A khi D thay đổi trên tia đối của tia AC.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Gọi C là giao điểm của đường trung trực của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB (C nằm trên cung $\widehat{AB}$ không đi qua O) khi đó tam giác ABC cân tại C và tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$ không đổi. Áp định lí Ptoleme đối với tứ giác OACB ta có

$$OA.BC + OB.AC = OC.AB \Leftrightarrow (OA + OB)\,AC = OC.AB$$

$$\Leftrightarrow a.AC = OC.AB \Rightarrow OC = a.\frac{AC}{AB} \text{ không đổi.}$$

Vì OC là phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên do đó đường thẳng OC cố định.

2. Xem cách giải Bài 1.

4. Rõ ràng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 đi qua một điểm M khác A, B, C. Theo định lí hàm số sin đối với các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 ta có :

$$B_1C_1 = MA.\sin A \ ; \ C_1A_1 = MB.\sin B \ ; \ A_1B_1 = MC.\sin C.$$

Từ đó ta suy ra rằng $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{m.\sin A}{n.\sin C}$ và $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{m.\sin A}{p.\sin B}$. Các tỉ số đó chứng tỏ M là điểm chung của hai đường tròn cố định, hoặc của hai đường thẳng cố định, hoặc của một đường tròn và một đường thẳng cố định.

5. Gọi M' là ảnh của M qua phép quay tâm O với góc quay 90^0 khi đó các điểm A', B', C', D' nằm trên đường tròn đường kính MM'. Phép quay đó biến d thành d' vuông góc với d tại N. Rõ ràng N là điểm cố định và nằm trên đường tròn đi qua bốn hình chiếu đó.

6. Đường thẳng MD cắt BQ tại F và đường thẳng CD cắt BP tại E. Dễ dàng thấy rằng các điểm B và D cùng nhìn EF dưới những góc cùng số đo. Hơn nữa, các điểm đó nằm cùng phía đối với EF. Vì vậy tứ giác BDEF nội tiếp. Ta có $\widehat{BEF} = \widehat{BDF} = \widehat{BCD}$. Vì tam giác BCD và tam giác BPQ đồng dạng nên $\widehat{BCD} = \widehat{BPQ}$. Từ các kết quả trên ta suy ra PQ // EF. Tứ giác BDHQ có hai góc tại đỉnh H và B bù nhau. Bởi vậy BDHQ là tứ giác nội tiếp. Suy ra rằng H và B cùng nhìn đoạn CP dưới những góc có số đo bằng nhau.

7. Thực hiện phép nghịch đảo tâm A với phương tích k = 1 biến B thành B', biến C thành C', biến R thành R', biến Q thành Q'. Ta có $AB = \dfrac{1}{AB'}$, $AC = \dfrac{1}{AC'}$, $AQ = \dfrac{1}{AQ'}$, $AR = \dfrac{1}{AR'}$. Từ hệ thức $\dfrac{AR}{AB} + \dfrac{AQ}{AC} = 1$ suy ra $\dfrac{AB'}{AR'} + \dfrac{AC'}{AQ'} = 1$.

Đặt a = AB', b = AC', khi đó $\dfrac{a}{AR'} + \dfrac{b}{AQ'} = 1$, với a, b không đổi và R', Q' thay đổi. (Bài 19 Chủ đề 10 đã chứng minh).

9. Gọi P là điểm chung thứ hai của (O_1) và (O_2). Nếu P nhìn các đoạn B_1C_1 và C_1A_1 dưới các góc $\pi - \widehat{A}$ và $\pi - B$ thì P nhìn A_1B_1 dưới một góc $2\pi - (\pi - \widehat{A} + \pi - \widehat{B}) = \widehat{A} + \widehat{B} = \pi - \widehat{C}$. Điều đó chứng tỏ (O_3) đi qua P.

Nếu P nhìn B_1C_1 dưới một góc bằng góc $\widehat{A}$ và nhìn A_1C_1 dưới một góc bằng góc $\widehat{B}$ (giả sử $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ là các góc nhọn) khi đó P nằm ngoài tam giác ABC. Vì vậy C_1 nằm trên cung $\overset{\frown}{PB_1}$ của (O_1) không chứa A và cung $\overset{\frown}{PA_1}$ của (O_2) không chứa B. Tức là tia PC_1 nằm trong góc $\widehat{A_1PB_1}$. Từ đó ta suy ra P nhìn A_1B_1 dưới một góc có số đo bằng $\widehat{A}+\widehat{B}$ và khác phía với C đối với AB. (AB nằm trong hai góc $\widehat{PAC}$ và $\widehat{PBC}$). Trong các điểm A_2, B_2, C_2 có ít nhất hai điểm cùng phía với MP. Nếu cả ba cùng phía đối với PM thì các điểm này cùng nhìn PM dưới các góc cùng số đo. Nếu một trong ba điểm khác phía đối với PM thì điểm đó nhìn PM dưới một góc có số đo bù với số đo của góc nhìn PM từ hai điểm còn lại. Điều đó chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ đi qua điểm P cố định.

11. Giả sử $A(x_1 ; 0)$, $B(x_2 ; 0)$, $C(0 ; q)$ là giao điểm của P với các trục toạ độ và đường tròn đi qua các điểm A, B, C có phương trình

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Khi đó các tham số a, b, c là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1^2 - 2ax_1 + c = 0 \\ x_2^2 - 2ax_2 + c = 0 \\ q^2 - 2bq + c = 0. \end{cases}$$

Từ hệ trên ta suy ra $2a = x_1 + x_2$, $c = x_1.x_2$, $2b = q + \dfrac{x_1x_2}{q}$. Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -p$ và $x_1.x_2 = q$ nên $2a = -p$ và $2b = q + 1$. Phương trình đường tròn đi qua A, B, C có dạng $x^2 + y^2 + px - (q + 1)y + q = 0$. Nếu $M(x_0 ; y_0)$ là điểm cố định của đường tròn thì đẳng thức

$$x_0^2 + y_0^2 + px_0 - (q + 1)y_0 + q = 0$$

đúng với mọi p và q. Điểm đó là điểm có toạ độ (0 ; 1).

12. Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi đó MA = MB = MC và $\Delta MAB = \Delta MAC$. Vì tam giác FBE đồng dạng với tam giác ABC nên FB = FE = AD. Ta thấy rằng $\Delta MFB = \Delta MAD$ (c.g.c) nên $\widehat{MFB} = \widehat{MDA}$. Các điểm D và F cùng nhìn đoạn thẳng AM dưới một góc có số đo bằng nhau nên M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF.

CHUYÊN ĐỀ 12

ĐIỂM MIGEN CỦA MỘT TAM GIÁC

Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Kí hiệu O_1, O_2, O_3 tương ứng là các đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Dễ dàng chứng minh được rằng cáchttp://blog.kowalczyk.info/software/sumatrapdf/index.html đường tròn đó cùng đi qua một điểm M. Điểm M được gọi là điểm Migen của tam giác ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$. Tam giác $A_1B_1C_1$ được gọi là tam giác Migen.

Nếu M nằm trong tam giác ABC thì M nhìn ba cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ dưới những góc bù với các góc của tam giác ABC.

Nếu M nằm ngoài tam giác ABC thì M nhìn một trong ba cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ dưới một góc có số đo bù với số đo một góc của tam giác ABC và nhìn hai cạnh còn lại của tam giác đó dưới hai góc có số đo bằng số đo của hai góc còn lại trong tam giác ABC.

Điểm Migen của một tam giác được dùng để khảo sát các bài toán liên quan đến sự nội tiếp của hai tam giác đó.

BÀI TẬP

1. Giả sử M là điểm Migen của tam giác ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$ và P là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng tam giác. Các đường thẳng PA, PB, PC cắt các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) lần thứ hai tại các điểm A_2, B_2, C_2 tương ứng. Chứng minh rằng bốn điểm A_2, B_2, C_2, P nằm trên cùng một đường tròn và đường tròn này đi qua M.

2. Giả sử M là điểm Migen của tam giác ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng nếu tỉ số ba cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ không đổi thì M không phụ thuộc vào vị trí các điểm A_1, B_1, C_1.

3. Giả sử ABC là tam giác nhọn và các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\widehat{AA_1B} = \widehat{BB_1C} = \widehat{CC_1A}$. Kí hiệu A_2 là giao điểm của BB_1 và CC_1 ; B_2 là giao điểm của AA_1 và CC_1 ; C_2 là giao điểm của AA_1 và BB_1. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác ABC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$.

4. Chứng minh rằng nếu điểm Migen M của tam giác ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$ nhỏ nhất thì các điểm A_1, B_1, C_1 là trung điểm ba cạnh tam giác ABC.

5. Giả sử điểm Migen M của tam giác ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

6. Giả sử các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại điểm M. Chứng minh rằng nếu M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ thì M là điểm Migen của tam giác ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$.

7. Giả sử A_1, B_1, C_1 là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm Migen M của tam giác ABC ứng với $A_1B_1C_1$ hoặc trùng với điểm Brôcar của ABC hoặc trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

8. Giả sử A_1, B_1, C_1 là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng chu vi tam giác $A_1B_1C_1$ nhỏ nhất khi A_1, B_1, C_1 là chân các đường cao tam giác ABC.

9. $A_1B_1C_1$ là tam giác Migen của tam giác ABC ứng với điểm M. Giả sử các tiếp tuyến tại A, B, C với các đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, tam giác BC_1A_1, tam giác CA_1B_1 lần lượt cắt nhau tại C_2, B_2, A_2. Chứng minh rằng M là điểm Migen của tam giác $A_2B_2C_2$ ứng với tam giác ABC.

10. Cho hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$. Xét các tam giác ABC ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ (A_1 thuộc cạnh BC, B_1 thuộc cạnh AC và C_1 thuộc cạnh AB) và đồng dạng với $A_2B_2C_2$. Tìm tam giác có chu vi lớn nhất.

11. $A_1B_1C_1$ là tam giác Migen của tam giác ABC ứng với điểm M. Chứng minh rằng tâm của ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, tam giác BC_1A_1 và tam giác CB_1A_1 là đỉnh của một tam giác đồng dạng với tam giác ABC.

12. $A_1B_1C_1$ là tam giác Migen của tam giác ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác ABC. Trên cung $\overset{\frown}{B_1MC_1}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 ta lấy điểm A_2. Tia C_1A_2 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1C_1 tại điểm B_2. Đường thẳng A_2B_1 cắt đường thẳng A_1B_2 tại C_2. Chứng minh rằng C_2 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác CA_1B_1 và tam giác $A_2B_2C_2$ đồng dạng với tam giác ABC.

13. M là điểm điểm Migen của tam giác đều ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng nếu M nằm trong tam giác ABC thì

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(MA_1+MB_1+MC_1).$$

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Trường hợp M nằm trong tam giác. Xét tất cả các vị trí của tia AP .

Trường hợp M nằm ngoài tam giác chẳng hạn M nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Xét các vị trí của tia AP.

2. Kí hiệu R_2 và R_3 là bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1C_1 và CA_1B_1. Ta có $\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{R_2}{R_3}.\frac{\sin B}{\sin C}$ (tỉ số này không phụ thuộc vị trí điểm M ở trong hoặc ngoài tam giác ABC). Trong các tam giác MBA_1 và MCA_1 ta có $MB = 2R_2.\sin\widehat{MA_1B}$ và $MC = 2R_3.\sin\widehat{MA_1C} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{R_2}{R_3}$ không đổi.

Điều này chứng tỏ rằng M hoặc nằm trên đường trung trực của cạnh BC hoặc trên đường tròn đường đường kính có các đầu mút là điểm chia trong và chia ngoài nó theo tỉ số trên.

4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1C_1 có bán kính không nhỏ hơn MB, cạnh A_1C_1 phụ thuộc vào bán kính đó. Vì vậy A_1C_1 nhỏ nhất khi MB là đường kính của đường tròn. Điều này kéo theo A_1 và C_1 là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC và AB. Ta biết rằng nếu các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ cùng nhỏ nhất thì chu vi của nó là nhỏ nhất. Nếu M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì hình chiếu của M trên các cạnh của tam giác ABC là trung điểm của các cạnh đó.

6. Kẻ qua A một đường thẳng a song song với BC. Gọi K, L tương ứng là các giao điểm của A_1C_1 và A_1B_1 với đường thẳng a. Ta có $\frac{AK}{BA_1} = \frac{AC_1}{C_1B}$ và $\frac{A_1C}{AL} = \frac{CB_1}{B_1A}$. Mặt khác các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại M nên ta có $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Từ các kết quả trên ta suy ra rằng AK = AL.

Tam giác A_1KL cân tại A_1 có AA_1 vừa là phân giác vừa là trung tuyến, nên AA_1 vuông góc với KL. Nghĩa là AA_1 là đường cao của tam giác ABC. Tương tự, BB_1 và CC_1 là các đường cao của tam giác kẻ từ B và C. Điểm M là trực tâm của tam giác ABC. Ta biết rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1 và CA_1B_1 đi qua M.

7. Trường hợp các góc tại đỉnh A_1 và B_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ tương ứng bằng các góc tại đỉnh C và A của tam giác ABC. Khi đó, đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 tiếp xúc với A_1B_1 và đường tròn ngoại tiếp tam giác CA_1B_1 tiếp xúc với A_1C_1. Rõ ràng M là điểm Brôcar của tam giác $A_1B_1C_1$. Vì vậy M cũng là điểm Brôcar của tam giác ABC.

Trường hợp các góc tại đỉnh A_1 và B_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ tương ứng bằng các góc tại đỉnh A và B của tam giác ABC. Gọi H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$, theo giả thiết ta suy ra các góc tại đỉnh A và H của tứ giác AB_1HC_1 bù nhau. Tứ giác AB_1HC_1 nội tiếp. Tương tự, các tứ giác BA_1HC_1 và CB_1HA_1 nội tiếp. Vậy điểm M trùng với H. Ta cần chứng minh rằng H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Thật vậy từ $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ ta suy ra $\frac{HA.\sin A}{BC} = \frac{HB.\sin B}{AC} \Leftrightarrow HA = HB$.

8. Kí hiệu M là điểm Migen của tam giác ABC ứng với tam giác $A_1B_1C_1$. Theo kết quả của các Bài 8 và Bài 9, chu vi tam giác $A_1B_1C_1$ không nhỏ hơn chu vi tam giác Pêđan $A_2B_2C_2$ ứng với điểm M. Theo tính chất của tam giác Pê đan thì chu vi tam giác $A_2B_2C_2$ không nhỏ hơn chu vi tam giác Pêđan ứng với trực tâm của tam giác ABC.

10. Xét ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Gọi M là điểm chung của ba đường tròn đó. Vì M nằm trên các cung chứa góc xác định được dựng trên các đoạn A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 do đó M là điểm cố định đối với mọi tam giác ABC. Kí hiệu R_1, R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BA_1C_1, CA_1B_1. Kí hiệu $\alpha = \widehat{MBA_1}$ và $\beta = \widehat{MCB}$ theo điều kiện bài toán R_1, R_2, α, β không đổi. Sử dụng định lí hàm số côsin vào tam giác MBC ta có

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 + 2MB.MC.\cos(\alpha + \beta).$$

Nếu $\alpha + \beta < 90^0$ thì BC lớn nhất khi và chỉ khi MB và MC lớn nhất, nghĩa là $MB = 2R_1$ và $MC = 2R_2$. Điều này tương đương với A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M trên BC, CA, AB.

Vậy nếu tam giác $A_1B_1C_1$ nhọn và M nằm trong tam giác đó thì chu vi tam giác ABC lớn nhất khi $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan ứng với M của ABC. Nếu $A_1B_1C_1$ tù tại A_1 và M luôn nhìn A_1C_1 và A_1B_1 dưới một góc tương ứng bằng góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ thì BC được nhìn từ M dưới một góc tù. Vì vậy BC nhỏ nhất khi $MB = 2R_1$ và $MC = 2R_2$. Nếu M cũng nhìn AB và AC dưới các góc tù. Bằng cách lập luận tương tự, ta suy ra chu vi tam giác ABC lớn nhất khi $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan.

11. Kí hiệu O_1, O_2, O_3 là tâm các đường tròn đó. Các cạnh của tam giác $O_1O_2O_3$ vuông góc với các tia MA_1, MB_1, MC_1. Vì vậy có ít nhất hai góc của tam giác $O_1O_2O_3$ bằng hai góc được nhìn từ điểm M đối với các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$.

CHUYÊN ĐỀ 13

TAM GIÁC PÊĐAN

Cho tam giác ABC. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ta xác định các điểm A_1, B_1, C_1 là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng tương ứng BC, CA, AB sao cho các điểm A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng. Khi đó ta nói tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác đã cho ứng với điểm M.

BÀI TẬP

$A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M. Xác định vị trí điểm M sao cho các cạnh B_1C_1 // BC, C_1A_1 // CA xảy ra đồng thời.

$A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M. Chứng minh rằng nếu các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên các cạnh của tam giác ABC và M là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác $A_1B_1C_1$ thì các đỉnh tam giác ABC là tâm các đường tròn bàng tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ và M là trực tâm tam giác ABC.

$A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC không vuông ứng với điểm M. Chứng minh rằng nếu M trùng với trực tâm tam giác ABC thì M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác Pêđan $A_1B_1C_1$ hoặc là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác đó.

Giả sử $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu

$$\widehat{BMC} - \widehat{A} = \widehat{CMA} - \widehat{B} = \widehat{AMB} - \widehat{C}$$

thì tam giác $A_1B_1C_1$ là đều.

5. Giả sử $A_1B_1C_1$ là tam giác Pê đan của tam giác ABC ứng với điểm M. Kí hiệu x, y, z lần lượt là các đường thẳng đi qua A, B, C và tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng :

a) Các đường thẳng x, y, z cắt nhau tại một điểm M' nào đó ;

b) AM và AM' là các đường đẳng giác thuộc góc $\widehat{BAC}$;

c) Các đỉnh tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với M' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác Pêđan $A_1B_1C_1$.

6. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác đều ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng $AC_1 + BA_1 + CB_1 = AB_1 + CA_1 + BC_1$.

7. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác nhọn ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh của tam giác Pêđan không lớn hơn một nửa độ dài một cạnh của tam giác ABC.

8. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M. Chứng minh rằng nếu các đỉnh của tam giác Pêđan nằm trên đường tròn Ơle của tam giác ABC thì M trùng với trực tâm hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

9. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với giao điểm các phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu tam giác Pêđan $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác ABC thì cả hai tam giác đó là tam giác đều.

10. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác. Kí hiệu A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng MA, MB, MC. Các điểm M_1, M_2, M_3 lần lượt đối xứng với M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

a) Các điểm A_2, B_2, C_2 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác Pêđan khi và chỉ khi các điểm M_1, M_2, M_3 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ;

b) Nếu M_1, M_2, M_3 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì các đường thẳng AM_1, BM_2, CM_3 đồng quy.

11. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M là giao các phân giác trong của tam giác ABC. Kí hiệu B_2 là giao điểm của BM với A_1B_1 ; C_2 là giao điểm của CM với A_1C_1. Chứng minh rằng B_2C_2 // BC.

12. A_1 B_1 C_1 là tam giác Pêđan của tam giác nhọn ABC ứng với điểm M nằm ngoài tam giác ABC. Các đỉnh của tam giác Pêđan nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng $A_1B_1C_1$ có một góc tù.

13. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M. Chứng minh rằng nếu M là điểm Brôcar của tam giác ABC thì M là điểm Brôcar của tam giác $A_1B_1C_1$.

14. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với giao điểm M các phân giác trong của tam giác ABC. Kí hiệu A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của MA_1, MB_1, MC_1 với các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 của tam giác Pêđan. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

15. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M. Kí hiệu x là đường thẳng đi qua trung điểm các đường chéo tứ giác AB_1MC_1 ; y là đường thẳng đi qua trung điểm các đường chéo tứ giác BA_1MC_1 ; z là đường thẳng đi qua trung điểm các đường chéo tứ giác CB_1MA_1. Chứng minh rằng nếu M là trọng tâm của tam giác Pêđan $A_1B_1C_1$ thì các đường thẳng x, y, z đồng quy.

16. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M. Chứng minh rằng nếu M nằm trên đoạn thẳng nối chân hai phân giác trong của hai góc tam giác ABC thuộc hai cạnh đối của hai góc thì tổng các khoảng cách từ M tới hai đỉnh tam giác Pêđan $A_1B_1C_1$ bằng khoảng cách từ M đến đỉnh còn lại.

17. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC không đều ứng với điểm M. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm M_1 và M_2 để tam giác $A_1B_1C_1$ là đều và đường thẳng M_1M_2 đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

18. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác đều ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$ không nhỏ hơn $h\sqrt{3}$, h là đường cao của tam giác ABC.

19. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác nhọn ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác Pêđan nhỏ nhất khi M trùng với trực tâm tam giác ABC.

b) Giả sử các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên các cạnh tam giác ABC và M nằm ngoài tam giác. Tìm tập hợp điểm M.

20. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác nhọn ABC ứng với điểm M nằm ngoài tam giác ABC. Các đỉnh của tam giác Pêđan nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng chu vi của tam giác $A_1B_1C_1$ lớn hơn chu vi tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với trực tâm của tam giác đó.

21. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 \le MA.\sin\frac{A}{2} + MB.\sin\frac{B}{2} + MC.\sin\frac{C}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

22. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pê đan của tam giác ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng

$$(MA_1 + MB_1).(MB_1 + MC_1).(MC_1 + MA_1) \le MA.MB.MC.$$

23. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M có các đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Kí hiệu ρ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\rho \ge r$. Từ kết quả đó hãy suy ra rằng nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $R \ge 2r$.

24. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pêđan của tam giác ABC ứng với điểm M nằm trong tam giác. Kí hiệu x, y, z là khoảng cách từ M đến các đỉnh tương ứng A_1, B_1, C_1 và u, v, w là khoảng cách từ M đến các đỉnh tương ứng A, B, C ; a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC đối diện với các đỉnh A, B, C. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây :

a) $au \ge cy + bz$;

b) $u + v + w \ge 2(x + y + z)$ (Erdos).

25. $A_1B_1C_1$ là tam giác Pê-đan của tam giác ABC ứng với điểm M, M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kí hiệu A_2 là giao điểm của MA_1 và B_1C_1 ; B_2 là giao điểm của MB_1 và A_1C_1 ; C_2 là giao điểm của MC_1 và A_1B_1. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

26. Giả sử các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB chứa các cạnh của tam giác ABC là tam giác Pê-đan ứng với điểm M. Các điểm A_2, B_2, C_2 tương ứng là các giao điểm của MA, MB, MC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng các tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ đồng dạng.

27. Giả sử các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB chứa các cạnh của tam giác ABC là các đỉnh của tam giác Pêđan ứng với điểm M. Kí hiệu S_1, S lần lượt là diện tích tam giác $A_1B_1C_1$, ABC. Khoảng cách từ điểm M đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là d và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Chứng minh rằng

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|}{4} \text{ (công thức Ơ-le).}$$

28. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho tồn tại tam giác pêđan $A_1B_1C_1$ của ABC ứng với M.

29. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Với mỗi điểm M không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác các đường thẳng MA, MB, MC cắt đường tròn ngoại tiếp lần thứ hai tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm M để A'B'C' là tam giác đều.

30. Trên đường tròn nội tiếp trong một tam giác đều ta lấy điểm M. Kí hiệu A', B', C' là chân đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng chứa các cạnh tam giác. Chứng minh rằng các điểm A', B', C' là đỉnh của một tam giác và diện tích của tam giác đó không phụ thuộc vị trí của điểm M trên đường tròn.

31. Giả sử A_1, B_1, C_1 là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác nhọn ABC sao cho các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1 và CB_1A_1 đi qua một điểm cố định M nằm trong tam giác ABC. Chứng minh rằng chu vi tam $A_1B_1C_1$ không nhỏ hơn chu vi tam giác Pêđan ứng với M.

32. Giả sử A_1, B_1, C_1 là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác nhọn ABC sao cho các đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, tam giác BC_1A_1 và tam giác CB_1A_1 đi qua một điểm cố định M nằm ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng chu vi tam giác $A_1B_1C_1$ không nhỏ hơn chu vi tam giác Pêđan ứng với M.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AA' là đường kính của đường tròn (O). Ta thấy rằng B và C là chân đường vuông góc hạ từ A' xuống các đường thẳng AB và AC. Hai tam giác MB_1C_1 và A'BC cỏ các cạnh song song nên phép vị tự tâm A biến tam giác MB_1C_1 thành tam giác A'BC. Tức là M nằm trên đường thẳng AA'. Tương tự, nếu BB' là đường kính của đường tròn (O) thì M nằm trên BB'. Vậy thì M là giao điểm của AA' và BB'. Nghĩa là M trùng với tâm O.

2. Từ điều kiện của bài toán, ta suy ra M nằm trong tam giác ABC. Từ các tứ giác A_1MB_1C và A_1MB_1B nội tiếp ta có

$$\widehat{MCB_1} = \widehat{MA_1B_1} = \widehat{MA_1C_1} = \widehat{MBC_1}.$$

Đẳng thức đó chứng tỏ tứ giác BCB_1C_1 nội tiếp. Tương tự, ta có các tứ giác ABA_1B_1 và ACA_1C_1 nội tiếp. Từ đó suy ra rằng $\widehat{BA_1C_1} = \widehat{CA_1B_1} = \widehat{BAC}$. Hơn nữa, A_1A là phân giác của góc $\widehat{B_1A_1C_1}$ nên A_1A vuông góc với BC và A_1 là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC. Các điểm B_1, C_1 lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Vì vậy M là trực tâm của tam giác ABC.

4. Vì M nằm trong tam giác ABC nên C_1M là tia nằm trong góc $\widehat{A_1C_1B_1}$. Trong tứ giác nội tiếp AB_1MC_1 ta có $\widehat{B_1C_1M} = \widehat{MAC}$. Trong tứ giác BA_1MC_1 nội tiếp ta có $\widehat{A_1C_1M} = \widehat{MBC}$. Từ đó ta có

$$\widehat{A_1C_1B_1} = \widehat{MAC} + \widehat{MBC} = \widehat{A} - \widehat{MAB} + \widehat{B} - \widehat{MBA} = \widehat{AMB} - \widehat{C}.$$

Tương tự, $\widehat{A_1B_1C_1} = \widehat{MAB} + \widehat{MCB} = \widehat{AMC} - \widehat{B}$

5. a) Dùng hệ quả của định lí Cacno để chứng minh.

b) Hai tam giác ABC và AC_1B_1 đồng dạng. Đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 là AM và đường cao nằm trên x. Phép đối xứng qua phân giác của góc $\widehat{BAC}$ biến AM thành AM'.

6. Sử dụng Định lí Cácnô để chứng minh.

10. a) Phép vị tự tâm M biến M_1 thành A_1 thì biến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác Pêđan. Vì hệ số vị tự bằng 0,5 nên ảnh của A là trung điểm của đoạn MA, tức là ảnh của A là A_2.

b) A_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AB_1MC_1 nên A_2 là trung điểm của cung $\overset{\frown}{B_1C_1}$ không chứa A_1 và A_1A_2 là phân giác trong của tam giác Pêđan kẻ từ A_1. Vì các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy và AM_1, BM_2, CM_3 là ảnh của chúng trong phép vị tự tâm M hệ số vị tự là 2 nên các đường thẳng AM_1, BM_2, CM_3 đồng quy.

12. Rõ ràng M không nằm trong các góc đối đỉnh với các góc của tam giác ABC. Thật vậy, nếu M nằm trong góc đối đỉnh với góc $\widehat{BAC}$ thì các góc tạo bởi tia AM với các tia đối của tia AB và AC là góc nhọn. Do đó hình chiếu của M trên AB và AC thuộc các tia đối của các tia AB và AC. Nghĩa là các đỉnh tam giác Pêđan không nằm trên cạnh tam giác ABC. Ta xét M thuộc $\widehat{BAC}$ và nằm ngoài tam giác ABC. Khi đó M nằm trên cung $\overset{\frown}{A_1BC_1}$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BA_1C_1 và ta có $\widehat{A_1MC_1} = \hat{B}$. Tương tự $\widehat{A_1MB_1} = \hat{C}$. Vì MA_1 nằm trong góc $\widehat{B_1MC_1}$ nên ta có $\widehat{B_1MC_1} = \hat{B} + \hat{C}$. Từ điều kiện nội tiếp của tứ giác AB_1MC_1 và $\hat{A} < 90^0$ ta suy ra $\widehat{B_1MC_1} > 90^0$. Mặt khác, A_1 nằm trong tam giác MB_1C_1 nên $\widehat{B_1A_1C_1} > \widehat{B_1MC_1}$.

14. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác Pêđan $A_1B_1C_1$. Vì M là giao các phân giác của tam giác ABC nên đường tròn đó tiếp xúc với các cạnh của ta giác ABC tại các đỉnh của tam giác Pêđan. Kẻ qua A_2 đường thẳng song song với BC, đường thẳng đó cắt AB tại P và cắt AC tại Q. Các tứ giác MA_2PC_1 và MA_2QB_1 nội tiếp do đó các góc kề với cạnh PQ của tam giác MPQ bằng các góc kề với cạnh B_1C_1 của tam giác MB_1C_1. Từ đó ta suy ra tam giác MPQ cân tại M. Vì MA_2 vuông góc với PQ nên A_2 là trung điểm của PQ. Điều đó chứng tỏ AA_2 đi qua trọng tâm tam giác ABC.

15. Theo định lí Cácnô các đường thẳng đi qua A, B, C vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, đồng quy. Vì x đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AB_1MC_1 và trung điểm của dây B_1C_1 nên x vuông góc với dây B_1C_1. Tức là x song song với đường thẳng đi qua A và vuông góc với B_1C_1. Dễ thấy rằng phép vị tự tâm M hệ số 2 biến x thành đường thẳng đó.

17. Theo định lí hàm số sin với các tam giác A_1BC_1 và A_1B_1C ta có $A_1C_1 = MB.\sin B$ và $A_1B_1 = MC.\sin C$ do đó

$$A_1C_1 = A_1B_1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}.$$

Tương tự $\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$. Nếu tam giác ABC có ba cạnh khác nhau thì M là điểm chung của hai đường tròn Apollonius có đường kính nằm trên BC và AB. Đối với tam giác ABC hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Để ý rằng đường tròn A-pô-lô-ni-út có đường kính trên AC cũng đi qua hai giao điểm đó. Dễ thấy rằng OA là tiếp tuyến với đường tròn A-pô-lô-ni-út, ở đây O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trường hợp tam giác ABC cân thì M là giao của một đường tròn với đường trung trực của một cạnh tam giác đó.

19. Ta có $MA + MA_1 \geq h_a$ (h_a là đường cao tam giác kẻ từ A) và $MA = \frac{B_1C_1}{\sin A}$. Từ đó ta suy ra

$$B_1C_1 \geq h_a.\sin A - MA_1.\sin A = h_a.\sin A - MA_1\frac{BC}{2R}$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC).

Vậy $\quad A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \geq h_a.\sin A + h_b.\sin B + h_c.\sin C - \frac{S}{R}$

(S là diện tích tam giác ABC).

Chu vi của $A_1B_1C_1$ nhỏ nhất là

$$h_a.\sin A + h_b.\sin B + h_c.\sin C - \frac{S}{R} \text{ khi } MA + MA_1 = h_a,\ MB + MB_1 = h_b$$

và $MC + MC_1 = h_c$. Điều này chứng tỏ M trùng với giao điểm ba đường cao tam giác ABC.

21. Đặt $\alpha = \widehat{MAB_1}$, $\beta = \widehat{MAC_1}$, ta có $MB_1 = MA.\sin\alpha$ và $MC_1 = MA.\sin\beta$

$$\Rightarrow MB_1 + MC_1 = MA(\sin\alpha + \sin\beta) = 2MA.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\leq 2MA.\sin\frac{A}{2}.$$

Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi $\alpha = \beta$, nghĩa là M nằm trên phân giác góc BAC.

22. Hãy sử dụng bất đẳng thức trong lời giải của Bài 21 và lưu ý

$$8.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq 1.$$

23. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ còn cắt các cạnh của tam giác ABC tại các điểm khác các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$. Do đó các cung của đường tròn nằm ngoài tam giác ABC. Dựng tam giác A'B'C' có các cạnh tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ và song song với các cạnh tam giác ABC. Tam giác A'B'C' chứa trong nó tam giác ABC nên diện tích của tam giac A'B'C' lớn hơn diện tích tam giác ABC. Theo tính chất của hai tam giác đồng dạng ta có $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2 > 1$. Nếu M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $2\rho = R$.

24. Dựng hình bình hành BCEF sao cho $\overline{BF} = \overline{AM}$. Dễ thấy rằng tổng diện tích các hình bình hành ABFM và ACEM bằng diện tích hình bình hành BCEF. Từ đó suy ra bất đẳng thức $au \geq by + cz$. Gọi M' là điểm đối xứng với M qua phân giác của góc BAC, khi đó M' nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Từ đó ta suy ra bất đẳng thức $au \geq cy + bz$. Viết lại nhiều lần kiểu bất đẳng thức thứ hai và sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta được điều cần chứng minh.

25. Kẻ qua A_2 đường thẳng song song với BC và kí hiệu E, F tương ứng là giao điểm của đường thẳng đó với AB, AC. Các tứ giác MA_2EC_1 và MA_2FB_1 nội tiếp nên ta suy ra $\widehat{MC_1A_2} = \widehat{MEA_2}$. Tương tự, ta có $\widehat{MB_1A_2} = \widehat{MFA_2}$. Vì tam giác MB_1C_1 cân tại đỉnh M nên tam giác MEF cân tại M. Trong tam giác cân MEF, đường thẳng MA_2 vuông góc với EF nên A_2 là trung điểm của EF. Nghĩa là AA_2 đi qua trọng tâm tam giác ABC. Tương tự, các đường thẳng BB_2 và CC_2 đi qua trọng tâm tam giác ABC. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

26. Ta có $B_1C_1 = MA.\sin A$, $C_1A_1 = MB \sin B$, $A_1B_1 = MC.\sin C$. Từ phương tích của M đối với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$MA.MA_2 = MB.MB_2 = MC.MC_2 = k \ (k = \left|R^2 - d^2\right|).$$

Mặt khác từ hai tam giác MBC và MB_2C_2 đồng dạng, ta suy ra $B_2C_2 = \dfrac{k}{MB.MC}BC$. Xét tỉ số

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{MA.MB.MC}{k}.\frac{\sin A}{BC} = \frac{MA.MB.MC}{2R.k}.$$

Tỉ số đó chứng tỏ hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ đồng dạng (c.c.c).

27. Các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ được xác định bởi các công thức

$$a_1 = AM.\frac{a}{2R},\ b_1 = BM.\frac{b}{2R},\ c_1 = CM.\frac{c}{2R}.$$

Kéo dài AM, BM, CM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại các điểm A_2, B_2, C_2. Kí hiệu a_2, b_2, c_2 là độ dài các cạnh của tam giác đó. Từ sự đồng dạng của hai tam giác MBC và MB_2C_2 ta có

$$\frac{a_2}{a} = \frac{MB_2}{MC} = \frac{MC_2}{MB}.$$

Tương tự $$\frac{b_2}{b} = \frac{MA_2}{MC} = \frac{MC_2}{MA},\ \frac{c_2}{c} = \frac{MA_2}{MB} = \frac{MB_2}{MC}.$$

Mặt khác, ta có $MA.MA_2 = MB.MB_2 = MC.MC_2 = \left|R^2 - d^2\right|$.

Từ đó ta suy ra $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{MA.MB.MC}{2R\left|R^2 - d^2\right|}$.

Đẳng thức này chứng tỏ tỷ số độ dài các cạnh của hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ bằng nhau. Nghĩa là hai tam giác đó đồng dạng. Ký hiệu S_2 là diện tích tam giác $A_2B_2C_2$. Vì hai tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ cùng nội tiếp trong một đường tròn bán kính kính R nên $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{a_2b_2c_2}{abc}$.

$$\text{Ta có } \frac{S_1}{S} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)\left(\frac{S_2}{S}\right) = \left(\frac{MA^2.MB^2.MC^2}{4R^2\left|R^2 - d^2\right|^2}\right).\left(\frac{a_2b_2c_2}{abc}\right)$$

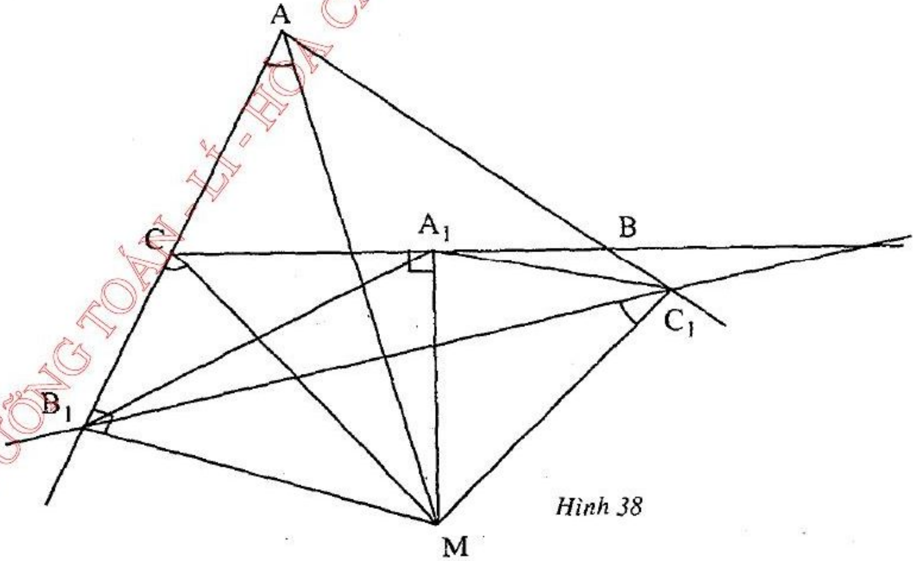
$$= \frac{MA.MB.MC.MA_2.MB_2.MC_2}{4R^2\left|R^2 - d^2\right|^2}$$

$$= \frac{\left|R^2 - d^2\right|}{4R^2} = \frac{\left|1 - \dfrac{d^2}{R^2}\right|}{4}.$$

28. (H.38)

Lời giải 1. Sử dụng kết quả Bài 26.

Lời giải 2. Giả sử ứng với M ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng (coi A_1 nằm



Hình 38

giữa B_1 và C_1). Như vậy đường thẳng A_1B_1 hoặc cắt hai cạnh tam giác hoặc cắt phần kéo dài của ba cạnh tam giác. Trường hợp A_1 và C_1 trên các cạnh BC và AB, khi đó các tứ giác MA_1C_1B và MA_1CB_1 nội tiếp nên các góc $\widehat{A_1MC} = \widehat{B_1}$ và $\widehat{A_1MC_1} = \widehat{B}$. Vì tia MA_1 nằm trong góc $\widehat{BMC}$ nên góc $\widehat{BMC_1} = \widehat{B_1} + \widehat{C}$. Từ đó ta suy ra tứ giác ACMB nội tiếp và M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trường hợp A_1B_1 cắt cạnh của tam giác kéo dài. Xét trường hợp như hình biểu diễn C_1 nằm giữa A_1 và B_1. Tam giác ABC nằm về một phía đối với đường thẳng A_1B_1. Từ các tứ giác nội tiếp AB_1MC_1 và CB_1MA_1 ta có

$$\widehat{MAB_1} = \widehat{MC_1B_1},\ \widehat{MCB_1} = \widehat{MA_1B_1},\ \widehat{MCB_1} > \widehat{MAB_1},\ \ \widehat{MC_1B_1} > \widehat{BAC}.$$

Các kết quả trên không thể xảy ra. Đối với các vị trí khác của điểm M, bạn đọc tự chứng minh.

29. Gọi $A_1B_1C_1$ là tam giác pêđan ứng với điểm M. Vì M không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên tam giác $A_1B_1C_1$ không suy biến. Theo Bài 26, tam giác $A_1B_1C_1$ và A'B'C' đồng dạng nên ta chỉ cần tìm tập hợp M để tam giác $A_1B_1C_1$ là đều.

31. Vì M nằm trong tam giác ABC nên M nhìn các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ dưới các góc bù với các góc tương ứng của tam giác ABC. Trong tam giác MA_1B_1 ta có :

$$A_1B_1^2 = MA_1^2 + MB_1^2 - 2.MA_1MB_1.\cos(\pi - C)$$
$$= MA_1^2 + MB_1^2 + 2.MA_1MB_1.\cos C.$$

Rõ ràng các số hạng ở vế phải của biểu thức dương nên A_1B_1 nhỏ nhất khi MA_1 và MB_1 vuông góc với BC và AC. Tương tự, B_1C_1 và C_1A_1 nhỏ nhất khi MC_1 vuông góc với AB.

32. Điểm M không thể nằm trong các miền góc đối đỉnh với các góc của tam giác ABC, vì nếu điều đó xảy ra kéo theo một số đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$ không nằm trên cạnh của tam giác ABC. Giả sử M nằm trong góc $\widehat{BAC}$, khi đó M nhìn B_1C_1 dưới một góc bằng $\widehat{B}+\widehat{C}=\pi-\widehat{A}$. Trong tam giác MB_1C_1 ta có

$$B_1C_1^2 = MB_1^2 + MC_1^2 + 2MB_1.MC_1.\cos A.$$

Các số hạng ở vế phải dương nên B_1C_1 nhỏ nhất khi MB_1 và MC_1 vuông góc với AC và AB. Kí hiệu α là số đo $\widehat{MBA_1}$ theo định lí hàm số sin với tam giác MA_1C_1 ta có $A_1C_1 = MA_1.\dfrac{\sin B}{\sin\alpha}$ do đó A_1C_1 nhỏ nhất khi MA_1 vuông góc với BC. Chứng minh tương tự đối với A_1B_1.

CHUYÊN ĐỀ 14

BA ĐƯỜNG CÔ-NIC

Trong chuyên đề này, ta xét các bài toán liên quan đến nhận dạng các đường cônic và quan hệ của các đường cong này với đường thẳng và đường tròn. Một số các kết quả sau đây được sử dụng để giải các bài toán đó.

CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Elip

a) Giả sử a, c là các số dương cho trước (a > c) và hai điểm cố định F_1, F_2 cách nhau một khoảng 2c. Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa hai điểm đã cho thoả mãn điều kiện $MF_1 + MF_2 = 2a$ là một elip với các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài trục lớn 2a.

b) Cho đường thẳng d, điểm F không thuộc d và số e sao cho $0 < e < 1$. Tập hợp điểm M nằm trong mặt phẳng chứa d và F thoả mãn điều kiện $\frac{MF}{h} = e$ là đường elip với d là đường chuẩn, F là tiêu điểm và e là tâm sai, trong đó h là khoảng cách từ M tới d.

c) Trong hệ toạ độ Oxy tập hợp điểm mà toạ độ là nghiệm phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

là một elip, trong đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

d) Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b = \sqrt{a^2 - c^2}$) và đường thẳng d : y = kx + m.

Điều kiện cần và đủ để d có điểm chung với (E) là $m^2 \le a^2k^2 + b^2$. Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi d và (E) có một điểm chung duy nhất.

Chứng minh. Xét phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)x^2 + 2\frac{km}{b^2}x + \frac{m^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm là

$$\Delta' = \frac{k^2m^2}{b^4} - \left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{m^2}{b^2}-1\right) \geq 0 \Rightarrow m^2 \leq a^2k^2 + b^2.$$

e) Cho Elip : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (E) và đường thẳng d : $y = kx$ ($k \neq 0$). Xét các điểm A, B trên (E) sao cho AB // d. Khi đó tập hợp trung điểm của dây AB nằm trên một đường thẳng có phương trình $y = -\frac{b^2}{ka^2}x$.

Chứng minh

Lời giải 1. Xét phép biến đổi f : M(x ; y) → M'(x' ; y') thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{a}{b}y \end{cases}$$

khi đó (E) biến thành đường tròn (C) có phương trình $x'^2 + y'^2 = a^2$ và d thành d' có phương trình $y' = \frac{ka}{b}x'$. Dây cung AB biến thành dây cung A'B' của (C). Vì A'B' // d', nên hệ số góc của A'B' là hệ số góc của d'. Khi dây cung A'B' thay đổi và luôn song song với d' thì trung điểm của dây A'B' nằm trên đường kính của (C) vuông góc với d'. Phương trình của đường thẳng đi qua tâm của (C) và vuông góc với d' có phương trình là $y' = -\frac{b}{ka}x'$ (Δ). Phép biến đổi

$$f^{-1} : M'(x'; y') \to M(x ; y)$$

được cho bởi điều kiện

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{b}{a}y' \end{cases}$$

biến (Δ) thành đường thẳng cố định chứa trung điểm dây AB và phương trình của nó là $y = -\frac{b^2}{ka^2}x$.

Lời giải 2. Toạ độ các điểm $A(x_1\,;\,y_1)$ và $B(x_2\,;\,y_2)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Xét phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)x^2 + 2\frac{km}{b^2}x + \frac{m^2}{b^2} - 1 = 0$.

Kí hiệu $I(x_i\,;\,y_i)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_i = -\dfrac{k}{\dfrac{b^2}{a^2} + k^2}m \\ y_i = \dfrac{\dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{b^2}{a^2} + k^2}m \end{cases}$$

với m là tham số. Đây là phương trình tham số của một đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Khử m từ hệ trên ta được $y_i = -\frac{b^2}{ka^2}x_i$

Hypebol

a) Giả sử a, c là các số dương cho trước ($c > a$) và hai điểm cố định F_1, F_2 cách nhau một khoảng 2c. Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa hai điểm đã cho thoả mãn điều kiện $|MF_1 - MF_2| = 2a$ là một hypebol với các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài trục thực bằng 2a.

b) Cho đường thẳng d, điểm F không thuộc d và số e sao cho $e > 1$. Tập hợp điểm M nằm trong mặt phẳng chứa d và F thoả mãn điều kiện $\frac{MF}{h} = e$ là đường hypebol với d là đường chuẩn, F là tiêu điểm và e là tâm sai, trong đó h là khoảng cách từ M tới d.

c) Trong hệ toạ độ Oxy tập hợp điểm mà toạ độ là nghiệm phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

là một hypebol, trong đó $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

d) Cho Hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng (d) : $y = kx + m$ ($k \neq \pm\frac{b}{a}$). Khi đó d và (H) có điểm chung khi và chỉ khi $m^2 \geq a^2k^2-b^2$. Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi d và H có duy nhất một điểm chung.

e) Cho Hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng (d) : $y = kx$ với $k \neq 0$. Xét các điểm A, B trên (H) sao cho AB // d. Khi đó tập hợp trung điểm của dây AB nằm trên đường thẳng $y = \frac{b^2}{ka^2}x$.

Parabol

a) Cho đường thẳng d và một điểm F cố định không nằm trên d. Tập hợp điểm M sao cho khoảng cách từ M tới d và F bằng nhau là một đường parabol. Đường thẳng d là đường chuẩn và điểm F là tiêu điểm của parabol.

b) Cho số $p > 0$. Trong hệ toạ độ Oxy tập hợp điểm mà toạ độ là nghiệm phương trình $y^2 = 2px$ (hoặc $x^2 = 2py$) là một parabol.

c) Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng (d) : $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó d và (P) có một điểm chung khi và chỉ khi $p \geq 2ab$. Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi d và P có một điểm chung duy nhất.

Chứng minh. Xét phương trình $y^2 = 2p\frac{y-b}{a} \Leftrightarrow y^2-2\frac{p}{a}y+\frac{2pb}{a}=0$. Điều kiện để phương trình này có nghiệm là $\frac{p^2}{a^2} \geq \frac{2pb}{a} \Leftrightarrow p \geq 2ab$. Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng và parabol có một điểm chung duy nhất.

d) Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng d : $y = kx$ ($k \neq 0$). Xét các điểm A, B trên (P) sao cho AB // d. Khi đó tập hợp trung điểm của dây AB nằm trên đường thẳng $y = \frac{p}{k}$.

BÀI TẬP

1. Cho số a > 0. Trong mặt phẳng, xét tất cả các tam giác ABC có trung tuyến AM cố định và tổng AB + AC = a. Tìm tập hợp các đỉnh B và C của tam giác đó .

2. Cho số a > 0. Trong mặt phẳng xét tất cả các tam giác ABC có trung tuyến AM cố định và $|AB - AC| = 2a$. Tìm tập hợp các đỉnh B và C của tam giác đó.

3. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm A cố định nằm trong đường tròn đó. Với mỗi điểm B nằm trên đường tròn, đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt đường thẳng OB tại điểm M. Tìm tập hợp M, khi B thay đổi trên đường tròn.

4. Cho đường tròn (O ; R) và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn đó. Với mỗi điểm B nằm trên đường tròn đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt đường thẳng OB tại điểm M. Tìm tập hợp M khi B thay đổi trên đường tròn.

5. Cho đường thẳng **d**, một điểm A cố định không nằm trên d và số a > 0. Tìm tập hợp điểm B sao cho AB – BH = a, trong đó H là hình chiếu của B trên d.

6. Cho đường thẳng d một điểm A cố định không thuộc d và một góc α. Xét các điểm B và C trên d sao cho số đo góc A của tam giác ABC bằng α. Chứng minh rằng khi các điểm B và C thay đổi trên d, thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chạy trên một hypebol cố định.

7. Cho đường thẳng **d**, một điểm A cố định không thuộc d và một góc α. Xét các điểm B và C trên d sao cho số đo góc A của tam giác ABC bằng α. Chứng minh rằng khi các điểm B và C thay đổi trên d thì tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC chạy trên một hypebol cố định.

8. Cho đường thẳng d một điểm A cố định không thuộc d và một góc α. Xét các điểm B và C trên d sao cho số đo góc A của tam giác ABC bằng α. Chứng minh rằng khi các điểm B và C thay đổi trên d, thì tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC thuộc góc BAC chạy trên một hypebol cố định.

9. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau và số thực $k \neq 0$. Giả sử A, B là các điểm cố định tương ứng thuộc d_1, d_2 sao cho AB vuông góc với hai đường thẳng đó. Giả sử A', B' tương ứng là các điểm trên d_1, d_2 sao cho đường thẳng AB' cắt đường thẳng BA' tại điểm M. Tìm tập hợp M khi các điểm A', B' thay đổi thoả mãn điều kiện $\overline{AA'}.\overline{BB'} = k$.

10. Cho sáu điểm A_1, A_2, ..., A_6 nằm trên elip (E) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sao cho A_1A_2 // A_4A_5, A_2A_3 // A_5A_6. Chứng minh rằng A_3A_4 // A_6A_1.

11. Cho Parabol : $y^2 = 2px$ ($p > 0$) và sáu điểm A_1, A_2,..., A_6 nằm trên đường cong đó sao cho A_1A_2 // A_4A_5, A_2A_3 // A_5A_6. Chứng minh rằng A_3A_4 // A_6A_1.

12. Cho sáu điểm A_1, A_2, ..., A_6 nằm trên hypebol $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ sao cho A_1A_2 // A_4A_5, A_2A_3// A_5A_6. Chứng minh rằng A_3A_4 // A_6A_1.

13. Gọi F(c ; 0) là một tiêu điểm, d là đường chuẩn có phương trình $x = \frac{a^2}{c}$ của một elip (E). Một đường thẳng đi qua F cắt (E) tại hai điểm A và B. Chứng minh rằng đương tròn đường kính AB không có điểm chung với đường chuẩn đó.

14. Cho F (c ; 0) là một tiêu điểm, d là đường chuẩn có phương trình $x = \frac{a^2}{c}$ của hypebol (H). Một đường thẳng đi qua F cắt (H) tại hai điểm A và B. Chứng minh đường tròn đường kính AB cắt d.

15. Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm của parabol và cắt nó tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của parabol đó.

16. Chứng minh rằng nếu một đường tròn (C) cắt đường hypebol (H) tại bốn điểm là các đỉnh một hình bình hành thì các cạnh của hình bình hành song song với các trục đối xứng của (H).

17. Một đường tròn (C) cắt hypebol (H) tại bốn điểm A, B, C, D sao cho AB // CD. Chứng minh rằng tâm của (C) nằm trên trục đối xứng của (H).

18. Giả sử đường tròn (C) và elip (E) cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D sao cho AB // CD. Chứng minh rằng tâm của đường tròn nằm trên trục đối xứng của (E).

19. Giả sử đường tròn (C) và parabol (P) cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D sao cho AB // CD. Chứng minh rằng tâm của đường tròn nằm trên trục đối xứng của (P).

20. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $F_1(-1\ ;\ 0)$, $F_2(1\ ;\ 0)$ và hai đường thẳng d_1, d_2 có các phương trình tương ứng $x = -2$, $x = 2$. Xét các điểm $A(2\ ;\ m)$ và $B(-2\ ;\ n)$ nằm trên các đường thẳng d_1 và d_2 sao cho đường tròn đường kính AB đi qua F_1.

a) Chứng minh rằng F_2 nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác F_1AB ;

b) Gọi F' là điểm đối xứng với F_1 qua đường kính AB. Đường thẳng F_2F' cắt AB tại điểm M. Chứng minh rằng khi các điểm A, B thay đổi trên d_1 và d_2 thì điểm M nằm trên đường elip cố định.

21. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Trên các đường thẳng $x = -a$ và $x = a$ ta lấy các điểm A và B sao cho đường thẳng AB có một điểm chung duy nhất với (E). Chứng minh rằng các điểm A, B cùng với hai tiêu điểm của (E) nằm trên cùng một đường tròn.

22. Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Trên các đường thẳng $x = -a$ và $x = a$ ta lấy các điểm A và B sao cho đường thẳng AB không song song với các đường tiệm cận của (H) và có một điểm chung duy nhất với (H). Chứng minh rằng các điểm A, B cùng với hai tiêu điểm của (H) nằm trên cùng một đường tròn.

23. Cho đường elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b). Xét tất cả các đường thẳng d có điểm chung duy nhất với (E). Chứng minh rằng tập hợp các hình chiếu của một tiêu điểm của (E) trên d nằm trên một đường tròn cố định.

24. Cho đường hypebol (H). Xét tất cả các đường thẳng d có điểm chung duy nhất với (H). Chứng minh rằng tập hợp các hình chiếu của một tiêu điểm của (H) trên d nằm trên một đường tròn cố định.

25. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kí hiệu F_1, F_2 là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B và C lên hai cạnh đối. Các điểm C_1 và B_1 là hình chiếu của C và B trên đường thẳng F_1F_2, biết rằng trung điểm của các đoạn thẳng F_1F_2 và B_1C_1 trùng nhau. Chứng minh rằng elip có hai đỉnh thuộc trục lớn là B_1, C_1 với các tiêu điểm F_1 và F_2 có một điểm chung duy nhất với đường thẳng BC.

26. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng song song mà mỗi đường có một điểm chung duy nhất với elip (hypebol) thì chúng đối xứng với nhau qua tâm của elip (hypebol)

27. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng mà mỗi đường có một điểm chung duy nhất với parabol cắt nhau trên trục đối xứng của parabol thì hai đường thẳng đó đối xứng với nhau qua trục của parabol.

28. Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng mà mỗi đường có một điểm chung duy nhất với elip (hypebol) cắt nhau trên trục đối xúng của elip (hypebol) thì hai đường thẳng đó đối xứng với nhau qua trục của đường cong đó.

29. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm M(–2 ; 1). Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua M cắt elip tại hai điểm phân biệt A, B ; Viết phương trình của đường thẳng sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

30. cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ và điểm M(3 ; –2). Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua M cắt hypebol tại hai điểm phân biệt A, B ; Viết phương trình của đường thẳng sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

31. Cho parabol $y^2 = 6x$ và điểm $M\left(3;-\frac{1}{2}\right)$. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua M cắt parabol tại hai điểm phân biệt A, B ; Viết phương trình của đường thẳng sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

32. Cho elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình đường tròn cắt elip tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

33. Cho hypebol $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Viết phương trình đường tròn sao cho đường tròn đó cắt hypebol tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.

34. Cho parabol $y^2 = 4x$. Viết phương trình đường tròn sao cho đường tròn đó cắt parabol tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của hình nửa lục giác đều có độ dài cạnh là 1 (đơn vị độ dài).

35. Cho elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

a) Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt elip tại hai điểm A, B sao cho độ dài $AB=\sqrt{5}$ (đơn vị độ dài).

b) Viết phương trình đường thẳng cắt elip tại hai điểm A, B và cắt đường thẳng $y = 2x$ tại M thoả mãn điều kiện MA = MB.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua M, khi đó A' cố định. Tứ giác ABA'C là hình bình hành, nên ta có BA' = AC và CA' = AB. Từ điều kiện bài toán ta suy ra BA + BA' = CA + CA' = a. Điều đó chứng tỏ B và C nằm trên cùng một elip cố định có hai tiêu điểm A, A' và độ dài trục lớn bằng a. Đường thẳng AA' cắt elip đó tại hai điểm M và M'. Các điểm này cùng với A thẳng hàng. Do đó trừ M và M' các điểm còn lại nằm trên elip là tập hợp các đỉnh B và C. Rõ ràng nếu a < AM thì tam giác ABC không tồn tại.

3. Rõ ràng OA < OB nên đường trung trực của đoạn AB cắt bán kính OB tại điểm M Từ điều kiện MB + MO = R và MB = MA, suy ra MO + MA = R. Tập hợp M là elip có hai tiêu điểm là O và A, độ dài trục lớn 2R.

4. Vì OA > OB nên M nằm trên phần kéo dài của OB. Nếu M thuộc tia đối của tia OB thì ta có MB – MO = R. Vì MB = MA nên MA – MO = R. Nếu M trên tia OB thì ta có MO – MB = MO – MA = R. Từ các kết quả trên ta suy ra rằng với mọi điểm B trên đường tròn, ta có $|MA - MO| = R$. Chứng tỏ tập hợp M là một hypebol có hai tiêu điểm O, A và độ dài trục thực bằng R.

5. Từ AB – BH = a, suy ra AB = a + BH. Trên tia BH ta lấy điểm H' sao cho BH' = a + BH, khi đó HH' = a. Dựng đường thẳng Δ đi qua H' và song song với d, rõ ràng Δ cố định. Tập hợp B là một parabol nhận A làm tiêu điểm và Δ làm đường chuẩn.

6. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC, H là hình chiếu của O trên d. Nếu α không tù thì góc BOC = 2α. Trong tam giác vuông OBH ta có

$$\frac{OB}{OH} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Vì OA = OB nên $\dfrac{OA}{OH} = \dfrac{1}{\sin\alpha} = e$

không đổi với e > 1. Đẳng thức này chứng tỏ O nằm trên đường cong H nhận A làm tiêu điểm và d làm đường chuẩn với tâm sai e. Trường hợp α tù thì $\widehat{BOC} = 360^0 - 2\alpha$. Trong tam giác vuông OBH ta có

$$\frac{OB}{OH} = \frac{1}{\sin\left(180^0 - \alpha\right)} = \frac{1}{\sin\alpha} = e.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp O nằm trên đường hypebol có A là tiêu điểm, d là đường chuẩn và tâm sai e.

7. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Các điểm A', B' lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với các cạnh BC, CA. Trong tam giác vuông IAB' ta

có $\frac{IA}{IB'} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = e$. Vì IA' = IB' nên $\frac{IA}{IA'} = e$ (với e > 1). Điều đó chứng tỏ I nằm trên hypebol cố định nhận A làm tiêu điểm, d làm đường chuẩn và tâm sai $e = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

9. Chọn hệ toạ độ sao cho A(–a ; 0), B(a ; 0), khi đó A'(–a ; m), B'(a ; n). Phương trình AB' là $\frac{x+a}{2a} = \frac{y}{n}$. Phương trình A'B là $\frac{x-a}{-2a} = \frac{y}{m}$. Toạ độ điểm M thoả mãn đồng thời các phương trình đường thẳng AB' và A'B. Từ các phương trình đó với nhau ta được $\frac{x^2-a^2}{-4a^2} = \frac{y^2}{mn}$ (*). Từ điều kiện $\overline{AA'}.\overline{BB'} = k$, ta suy ra m.n = k. Thay kết quả này vào (*) ta được $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{k}{4}} = 1$ (**). Toạ độ của M thoả mãn (**). Nếu k = $4a^2$ thì tập hợp M là đường tròn. Nếu k < 0 thì tập hợp M là một hypebol. Nếu k > 0 và khác $4a^2$ thì tập hợp M là một elip.

10. Tồn tại phép dãn biến elip (E) thành đường tròn (C), các điểm A_i thành các điểm B_i thuộc (C). Khi đó B_1B_2 // B_4B_5, B_2B_3 // B_5B_6. Ta cần chứng minh rằng B_3B_4 // B_6B_1. Giả sử $B_1B_2\ B_3B_4\ B_5B_6$ là một lục giác lồi, ta chứng minh được rằng $\widehat{B_1} + \widehat{B_3} + \widehat{B_5} = \widehat{B_2} + \widehat{B_4} + \widehat{B_6}$. Mặt khác, ta có B_1B_2 // B_4B_5 suy ra $\widehat{B_3} = \widehat{B_6}$, B_2B_3 // B_5B_6 suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_4}$. Từ đó suy ra $\widehat{B_2} = \widehat{B_5}$ nghĩa là B_1B_6 // B_3B_4. Trường hợp $B_1B_2\ B_3B_4\ B_5B_6$ không là lục giác lồi, bạn đọc tự chứng minh.

11. Kí hiệu $(x_n ; y_n)$ là toạ độ điểm A_n. Xét vectơ

$$\overline{A_1A_2}\left(x_2 - x_1; y_2 - y_1\right) = \left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{2p}; y_2 - y_1\right),$$

vectơ này song song với vectơ $\left(\frac{y_2 + y_1}{2p}; 1\right)$. Tương tự

$\overline{A_4A_5}$ // $\left(\frac{y_5 + y_4}{2p}; 1\right)$. Điều kiện cần và đủ để A_1A_2 // A_4A_5 là $y_1 + y_2 = y_4 + y_5$.

12. Đặt $\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{a}{b} y \end{cases}$ đây là phép co–dãn f biến mỗi điểm M(x ; y) thành điểm M'(x' ; y'). Nó biến (H) thành (H') có phương trình $x'^2 - y'^2 = a^2$. Đặt $u = x' - y'$ và $v = x' + y'$, đây là phép biến đổi biến (H') thành (H'') có phương trình $uv = a^2$. Do các phép biến đổi trên bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm và tính song song của hai đường thẳng nên bài toán được đưa về đường cong có phương trình $xy = a^2$.

14. Kí hiệu ABCD là hình bình hành tạo bởi các giao điểm của (C) và (H). Vì ABCD nội tiếp trong (C) nên ABCD là hình chữ nhật. Ta chứng minh rằng các cạnh của ABCD song song với các trục đối xứng của (H). Nếu AB có hệ số góc k khác 0 thì đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh AB và CD có phương trình $y = \dfrac{b^2}{ka^2}x$. Đường thẳng này song song với các cạnh AD và BC. Vì AB vuông góc với BC, nên $\dfrac{b^2}{ka^2}.k = -1 \Rightarrow a^2 = -b^2$. Đẳng thức này không thể xảy ra. Vì vậy k = 0 hoặc không xác định, nghĩa là AB song song với một trục đối xứng của (H).

17. Theo Bài 16, AB và CD vuông góc với trục đối xứng của (H).

18. Xem cách giải Bài 17.

19. Nếu AB có hệ số góc k khác 0 thì đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD có phương trình $y = \dfrac{p}{k}$ (vì AB và CD là hai dây cung của (P) song song với nhau). Mặt khác A, B, C, D nằm trên đường tròn (C) nên ABCD là hình thang cân. Vì vậy trục đối xứng của hình thang vuông góc với AB. Hệ số góc của trục đối xứng là 0. Điều này không thể xảy ra. Do đó k không xác định, nghĩa là AB vuông góc với trục đối xứng của (P).

20. a) Nếu F_1 nằm trên đường tròn đường kính AB thì ta có m.n = 3. Từ đó suy ra $\overline{F_2A}.\overline{F_2B} = 0$.

b) Điểm M nằm trên elip $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

21. Giả sử $y = px + q$ là phương trình đường thẳng AB. Nếu $A(-a ; m)$ và $B(a ; n)$ thì $m = -ap + q$ và $n = ap + q$. Vì AB và (E) có một điểm chung duy nhất nên ta có $a^2p^2 + b^2 = q^2$. Mặt khác, ta có $mn = q^2 - a^2p^2$. Vì vậy $a^2p^2 + b^2 = mn + a^2p^2$, suy ra $mn = b^2$. Các tiêu điểm của (E) là $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$ với $c^2 = a^2 - b^2$. Ta xét tích vô hướng $\overrightarrow{F_2A}.\overrightarrow{F_2B} = -\left(a^2 - c^2\right) + mn = mn - b^2 = 0$. Điều này chứng tỏ F_2 nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Tương tự F_1 nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Vì vậy F_1, F_2 nằm trên đường tròn đường kính AB.

23. Kí hiệu $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$ là các tiêu điểm của (E). Giả sử d cắt các đường thẳng $x = a$ tại điểm $A(a ; m)$ và $x = -a$ tại $B(-a ; n)$. Nếu $y = kx + q$ là phương trình của d thì ta có $m = ka + q$, $n = -ka + q$ suy ra $q = \frac{m+n}{2}$; $k = \frac{m-n}{2}$. Vì d có một điểm chung duy nhất với (E) nên $mn = a^2 - c^2$. Gọi $H(x_0 ; y_0)$ là hình chiếu của F_2 trên d, khi đó toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = kx + q \\ y = -\frac{1}{k}(x - c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{c - kq}{k^2 + 1} \\ y_0 = kx_0 + q = \frac{kc + q}{k^2 + 1}. \end{cases}$$

Xét tổng $x_0^2 + y_0^2 = \frac{\left(c - kq\right)^2 + \left(ck + q\right)^2}{\left(k^2 + 1\right)^2} = \frac{c^2 + q^2}{k^2 + 1}$. Vì

$$k^2 + 1 = \left(\frac{m - n}{2a}\right)^2 + 1 = \frac{m^2 + n^2 + 2\left(a^2 + c^2\right)}{4a^2} \text{ và}$$

$$c^2 + q^2 = \frac{\left(m + n\right)^2}{4} + c^2 = \frac{m^2 + n^2 + 2\left(a^2 + c^2\right)}{4}$$

nên ta suy ra $x_0^2 + y_0^2 = a^2$. Đây là phương trình đường tròn cố định.

24. Cách giải tương tự Bài 23.

26. Nếu $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ là phương trình các đường thẳng thoả mãn điều kiện bài toán, thì ta có $m_1^2 = a^2k_1^2 + b^2$ và $m_2^2 = a^2k_2^2 + b^2$. Vì $k_1 = k_2$ nên $m_1 = -m_2$.

27. Nếu $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ là phương trình các đường thẳng thoả mãn điều kiện bài toán, thì ta có $p = 2k_1m_1$ và $p = 2k_2m_2$. Các đường thẳng cắt nhau trên trục của parabol nên ta có

$$\frac{m_2}{k_2} = \frac{m_1}{k_1} \Rightarrow \frac{k_2m_2}{k_2^2} = \frac{k_1m_1}{k_1^2} \Rightarrow k_1 = -k_2.$$

28. Nếu $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ là phương trình các đường thẳng thoả mãn điều kiện bài toán, thì ta có $m_1^2 = a^2k_1^2 + b^2$ và $m_2^2 = a^2k_2^2 + b^2$. Vì các đường thẳng cắt nhau trên trục đối xứng của elip, nên $m_1 = m_2$ hoặc $x_1 = -\frac{m_1}{k_1} = x_2 = -\frac{m_2}{k_2}$. Từ đó ta suy ra điều cần chứng minh.

29. Xét đường thẳng có phương trình $y = k(x + 2) + 1 = kx + 2k + 1$. Theo kiến thức cần nhớ d), ta có $(2k + 1)^2 < 16k^2 + 9 \Leftrightarrow 3k^2 - k + 2 > 0$. Bất phương trình này đúng với mọi k. Điều đó chứng tỏ đường thẳng cắt elip tại hai điểm phân biệt với mọi k.

Trường hợp đường thẳng có phương trình $x = -2$ luôn cắt elip, để M là trung điểm của AB, theo kiến thức cần nhớ e), điểm M phải thuộc đường thẳng $y = -\frac{9}{16k}x$. Từ đó ta tìm được $k = \frac{9}{8}$ và đường thẳng cần tìm có phương trình $y = -\frac{9}{8}x + \frac{13}{4}$.

32. Kí hiệu ABCD là giao điểm của đường tròn và elip. Vì AB // CD và AD // BD nên tâm của đường tròn nằm đồng thời trên hai trục đối xứng của (E). Nghĩa là tâm đường tròn trùng với tâm của elip và các cạnh của hình vuông song song với các trục đối xứng của elip. Phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 = R^2$. Vì **A** là đỉnh của hình vuông nằm trên elip nên A là giao điểm của đường thẳng $y = x$ (hoặc $y = -x$) với elip. Toạ độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$ và $R^2 = \frac{288}{25}$.

CHUYÊN ĐỀ 15

VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA $F = ax + by$ VỚI a, b LÀ HẰNG SỐ VÀ x, y THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Những bài toán trong các chuyên đề từ 15 đến 17 liên quan đến việc tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của dạng tuyến tính hai biến và phân tuyến tính hai biến bằng phương pháp hình học. Các điều kiện ràng buộc liên quan đến các miền đa giác hoặc miền tròn trên mặt phẳng toạ độ. Phương pháp giải các dạng toán này là chuyển đổi nội dung của bài toán dưới dạng đại số sang nội dung được mô tả bằng hình học và sử dụng các kết quả hình học để tìm miền giá trị của biểu thức cần tìm cực trị.

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với x, y là nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 = r$.

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với x, y là nghiệm của phương trình $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r$.

Bài toán 3. Cho các số thực dương m, n, r. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện $mx^2 + ny^2 = r$.

Phân tích. Điều kiện đã cho xác định đường elip

$$(E) : \frac{x^2}{\frac{r}{m}} + \frac{y^2}{\frac{r}{n}} = 1.$$

Biểu thức F được xem như đường thẳng d phụ thuộc F. Tìm tập các giá trị của F để đường thẳng d và (E) có ít nhất một điểm chung.

Phương pháp. Đặt $x=\sqrt{\frac{n}{m}}z$, khi đó (E) biến thành đường tròn $y^2+z^2=\frac{r}{n}$ và $F=a\sqrt{\frac{n}{m}}z+by$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với y, z thoả mãn điều kiện $y^2+z^2=\frac{r}{n}$.

Bài toán 4. Cho các số thực a_1, b_1, m, n, r (m > 0, n > 0, r > 0). Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện

$$m(x-a_1)^2+n(y-b_1)^2=r.$$

Bài toán 5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện $mx^2 \pm xy + ny^2 = r$ (m > 0, n > 0, r > 0).

Phương pháp. Đặt $x = p(u + v)$, $v = q(u - v)$, ta có $x^2 = p^2(u^2 + v^2 + 2uv)$, $y^2 = q^2(u^2 + v^2 - 2uv)$. Điều kiện đã cho tương đương với $m\ p^2(u^2 + v^2 + 2uv) \pm pq(u^2 - v^2) + n\ q^2(u^2 + v^2 - 2uv) = r$ $\Leftrightarrow (mp^2 \pm pq + nq^2)u^2 + (mp^2 \mp pq + nq^2)v^2 + 2uv\,(mp^2 - nq^2) = r$. Đặt $m_1 = (mp^2 \pm pq + nq^2)$, $n_1 = (mp^2 \mp pq + nq^2)$ và ta chọn các tham số p, q thoả mãn điều kiện $mp^2 = nq^2 \Leftrightarrow \frac{p}{q}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$, khi đó điều kiện đã cho tương đương với điều kiện $m_1u^2 + n_1v^2 = r$ và bài toán đó được đưa về Bài toán 1.

Bài toán 6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với x, y là nghiệm của hệ gồm phương trình bậc hai và các bất phương trình bậc nhất.

Bài toán 7. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với mọi x, y là nghiệm của hệ các bất phương trình bậc nhất.

BÀI TẬP

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = 2x - y$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hệ $\begin{cases}3x+4y=m\\ x^2+y^2=9\end{cases}$ có nghiệm.

3. Tìm tập hợp các số dương k để giá trị lớn nhất của $F = kx - y$ bằng 12 với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 12$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = 2a - b$ với a, b thoả mãn điều kiện $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 5$.

5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x + y$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 13$.

6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x - y$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + 8y^2 = 8$.

7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \sqrt{\frac{3}{2}}x + y$ với x, y thoả mãn điều kiện $3x^2 + 2y^2 = 1$.

8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = a + b$ với a, b thoả mãn điều kiện $(a - 2)^2 + 8(b + 3)^2 = 8$.

9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = 2a + b\sqrt{3}$ với a, b thoả mãn điều kiện $3a^2 + 4b^2 = 6a + 8b + 5$.

10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = a + b$ với a, b thoả mãn điều kiện $a^2 + ab + 9b^2 = 45$.

11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = a - b$ với a, b thoả mãn điều kiện $a^2 - ab + 4b^2 = 12$.

12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = a - b$ với a, b thoả mãn điều kiện $a^2 - 2ab + 9b^2 = 12$.

13. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = 2\sqrt{3-a} - \sqrt{2+a}$ với a thuộc miền xác định của F.

14. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x + y$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

15. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F = x – 6y với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2+4y^2=12 \\ 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

16. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F = x + 2y với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x-4y \le 3 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2} \le 1 \\ 3x-y \ge -2. \end{cases} \qquad (*)$$

17. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F = 2x – 3y với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x+2y \le 4 \\ x-\dfrac{y}{2} \ge -1 \\ 5x-2y \le 20 \\ 5x+3y \ge -5. \end{cases} \qquad (*)$$

18. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} 3x+y \ge 1 \\ x+y \le 5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. Kí hiệu d_1 là đường thẳng 2x – y = 0, (C) là đường tròn $x^2 + y^2 = 5$. Các tiếp tuyến của (C) song song với d_1 có phương trình 2x – y = 5, 2x – y = – 5. Các điểm $T_1(2 ; -1)$, $T_2(-2 ; 1)$ là tiếp điểm của (C). Dải mặt phẳng với biên là các tiếp tuyến đó chứa (C). Các giao điểm của các tiếp tuyến với trục Ox là $M_1(\frac{5}{2}; 0)$, $M_2(-\frac{5}{2}; 0)$. Biểu thức $F = 2x - y$ xác định đường thẳng d phụ thuộc vào F. Đường thẳng đó cắt Ox tại điểm $M(\frac{F}{2}; 0)$. Để đường thẳng d có ít nhất một điểm chung với (C) điều kiện cần và đủ là M thuộc đoạn thẳng M_1M_2. Từ đó ta tìm được $\min F = -5$ đạt được tại $x = -2$, $y = 1$ và $\max F = 5$ đạt được tại $x = 2$, $y = -1$.

2. ĐS : $-15 \le m \le 15$.

3. ĐS : $k = \sqrt{11}$.

4. Đặt $x = a + 2$, $y = b - 1$, khi đó $F = 2x - y - 5$. Bài toán được đưa về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = 2x - y - 5$ với $x^2 + y^2 = 5$.

6. Đặt $x = 2\sqrt{2}z$, khi đó $F = 2\sqrt{2}z - y$ với y và z thoả mãn điều kiện $y^2 + z^2 = 1$. Từ đó ta tìm được $\min F = -3$ đạt tại $x = -\frac{8}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ và $\max F = 3$ đạt tại $x = \frac{8}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

7. Đặt $z = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, khi đó $F = y + z$ với y, z thay đổi thoả mãn điều kiện

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{2}.$$

ĐS : $\min F = -1$ đạt được tại $z = y = -\frac{1}{2}$ và $\max F = 1$ đạt tại $z = y = \frac{1}{2}$.

8. Đặt $x = a - 2$, $y = b + 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = x + y - 1$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + 8y^2 = 8$. Đặt $z = 2\sqrt{2}y$, khi đó $F = x + \frac{\sqrt{2}}{4}z - 1$ với x, z thoả mãn điều kiện $x^2 + z^2 = 8$.

ĐS : $\max F = 2$ đạt tại $x = \frac{8}{5}$, $z = \frac{3\sqrt{2}}{3}$;

$\min F = -4$ đạt tại $x = -\frac{8}{5}$, $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

9. Điều kiện đã cho tương đương với $3(a-1)^2 + 4(b-1)^2 = 12$. Đặt $x = a - 1$, $y = b - 1$, khi đó $F = 2x + y\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$ với x, y thoả mãn điều kiện $3x^2 + 4y^2 = 12$. Đặt $z = \dfrac{2}{\sqrt{3}}y$. Bài toán được đưa về tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = 2x + \dfrac{3z}{2} + 2 + \sqrt{3}$ với x và z thoả mãn điều kiện $x^2 + z^2 = 4$.

ĐS : $\min F = -3+\sqrt{3}$ đạt tại $z = -\dfrac{6}{5}$; $x = -\dfrac{8}{5}$;

$\max F = 7+\sqrt{3}$ đạt tại $z = \dfrac{6}{5}$; $x = \dfrac{8}{5}$.

10. Đặt $a = p(x + y)$, $b = q(x - y)$, $m = 1$, $n = 9$ và ta chọn $p = 3$, $q = 1$. Điều kiện đã cho tương đương với điều kiện $\dfrac{x^2}{\frac{17}{5}} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow 15x^2 + 17y^2 = 51$ và $F = 4x + 2y$. Đặt $z = \sqrt{\dfrac{15}{17}}x$, khi đó điều kiện của bài toán tương đương với điều kiện $y^2 + z^2 = 3\,(*)$ và $F = \dfrac{2}{\sqrt{15}}(2\sqrt{17}z + \sqrt{15}y)$. Xét họ đường thẳng có phương trình $2\sqrt{17}z + \sqrt{15}y = m$.

Các đường thẳng $2\sqrt{17}z + \sqrt{15}y = \pm\sqrt{249}$ là tiếp tuyến của (*). Đường thẳng đi qua tâm đường tròn (*) vuông góc với các tiếp tuyến đó có phương trình là
$$\begin{cases} z = 2\sqrt{17}t \\ y = \sqrt{15}t. \end{cases}$$

Tọa độ các tiếp điểm T_1, T_2 là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} z = 2\sqrt{17}t \\ y = \sqrt{15}t \\ z^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow T_1\left(2\sqrt{\frac{51}{83}}; \sqrt{\frac{45}{83}}\right);\ T_2\left(-2\sqrt{\frac{51}{83}}; -\sqrt{\frac{45}{83}}\right).$$

Từ các kết quả trên ta tìm được $\min F = -2\sqrt{\dfrac{249}{15}}$ và $\max F = 2\sqrt{\dfrac{249}{15}}$ đạt tại y, z là toạ độ các điểm T_1 và T_2.

11. Đặt a = p(x + y), b = q(x − y), m = 1, n = 4 và ta chọn p = 2, q = 1. Điều kiện đã cho tương đương với điều kiện $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{6}{5}}=1 \Leftrightarrow 3x^2+5y^2=6$ và F = x + 3y. Đặt $z=\sqrt{\frac{3}{5}}x$, khi đó $F=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}z+3y$ với y, z thoả mãn điều kiện $y^2+z^2=\frac{6}{5}$ (*). Xét họ đường thẳng $\sqrt{15}y+z=m$. Các tiếp tuyến với đường tròn (*) có phương trình là $\sqrt{\frac{15}{3}}z+3y=\pm\sqrt{\frac{64}{5}}=\pm\frac{8}{\sqrt{5}}$.

12. Đặt $z=\sqrt{2}y \Rightarrow F=\sqrt{2}x+2z$, với $x^2+z^2=2$.

ĐS : min$F=-\sqrt{6}$, max$F=\sqrt{6}$.

13. Đặt $x=\sqrt{3-a}$, $y=\sqrt{2+a}$ ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F = 2x − y với x, y thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$ (*)

Điều kiện (*) là phần chung của đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2=5$ và hai nửa mặt phẳng $P_1=\{(x;y):x\ge 0\}$, $P_2=\{(x;y):y\ge 0\}$. (C) cắt biên của P_1 và P_2 tại các điểm $A_1(0;\sqrt{5})$ và $A_2(0;-\sqrt{5})$, $B_1(\sqrt{5};0)$, $B_2(-\sqrt{5};0)$. Cung (C') thoả mãn điều kiện (*) là cung nhỏ có các đầu mút A_1 và B_1. Gọi d_1 và d_2 là các đường thẳng lần lượt qua A_1, B_1 và song song với đường thẳng 2x − y = 0. Phương trình các đường thẳng đó là $2x-y=2\sqrt{5}$, $2x-y=-\sqrt{5}$. Dễ dàng nghiệm lại rằng d_1 và d_2 chỉ có duy nhất với (C') là A và B. Vì vậy dải mặt phẳng P với biến d_1, d_2 chứa (C'). Các điểm $M_1(\sqrt{5};0)$, $M_2(-\frac{\sqrt{5}}{2};0)$ là giao điểm của trục Ox với biên của P. Xét đường thẳng d có phương trình 2x − y = F. Điểm $M(\frac{F}{2};0)$ là giao điểm của d với Ox. Để d và cung A_1B_1 có ít nhất một điểm chung cần và đủ là M nằm trên đoạn thẳng M_1M_2. Từ đó ta suy ra $-\sqrt{5}\le F\le 2\sqrt{5}$ và min $F=-\sqrt{5}$ đạt tại x = 0, $y=\sqrt{5}$ và max $F=2\sqrt{5}$ đạt tại $x=2\sqrt{5}$, y = 0.

14. Đặt $z = y\sqrt{2}$, khi đó điều kiện đã cho tương đương với điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 6 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

xác định một cung phần tư thứ nhất (C) của đường tròn $x^2 + z^2 = 6$ và $F = x + \frac{1}{\sqrt{2}}z$. Các điểm $A(0\ ;\sqrt{6})$, $B(\sqrt{6}\ ;\ 0)$ là các đầu mút của (C). Ta xét tập hợp các đường thẳng cùng phương với đường thẳng $x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0$ (Δ). Gọi d_1, d_2 là các đường thẳng đi qua A, B và cùng phương với (Δ). Phương trình của chúng là $z = -\sqrt{2}\ x + \sqrt{6}$, $z = -\sqrt{2}\ x + 2\sqrt{3}$. Ký hiệu d_3 là tiếp tuyến của (C). Phương trình của d_3 là $x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 3$. Giao điểm của d_1, d_2, d_3 với Ox tương ứng là $M_1(\sqrt{3}\ ;\ 0)$, B, $M_2(3\ ;\ 0)$. Từ đó ta tìm được dải mặt phẳng Q với biên d_1, d_3 chứa (C). Các đường thẳng $z = -\sqrt{2}x + 2F$ cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại điểm $M(F\ ;\ 0)$. Từ đó ta suy ra min $F = \sqrt{3}$ đạt tại $x = 0$, $z = \sqrt{6}$ và max $F = 3$ đạt tại $x = 2$, $z = \sqrt{2}$.

15. Đặt $z = 2y$ bài toán được đưa về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x - 3z$ với x, z thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 12 \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2. \end{cases} \qquad (*)$$

Xét miền chữ nhật $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2. \end{cases}$

Các điểm A(1 ; 0), B(2 ; 0), C(1 ; 2), D(2 ; 2) là đỉnh của miền chữ nhật đó. Rõ ràng các đỉnh A, B, C, D nằm trong đường tròn $x^2 + z^2 = 12$ do đó tập hợp điểm thoả mãn điều kiện (*) là rỗng và bài toán không có đáp số.

16. Điều kiện (*) xác định miền tam giác ABC với các đỉnh A(3 ; 0), B(0 ; 2), C(–1 ; –1). Xét các đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng phương với đường thẳng x + 2y = 0 và đi qua các điểm tương ứng A, B, C. Phương trình các đường thẳng đó là x + 2y = 3, x + 2y = 4, x + 2y = –3. Ta thấy rằng các điểm B và C khác phía đối với đường thẳng d_1, do đó dải mặt phẳng P với biên d_2, d_3 chứa miền tam giác ABC và P được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} x+2y\le 4 \\ x+2y\ge -3. \end{cases}$$

Biên của P cắt trục Ox tại các điểm $M_1(4 ; 0)$, $M_2(-3 ; 0)$. Đường thẳng d thuộc P khi và chỉ khi d cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại M(F ; 0). Từ đó ta suy ra min F = –3 đạt tại x = –1, y = –1 và max F = 4 đạt tại x = 0, y = 2.

17. Điều kiện (*) xác định miền tứ giác ABCD với A(4 ; 0), B(0 ; 2), C(–1 ; 0), D(2 ; –5). Xét đường thẳng 2x – 3y = 0 và các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 cùng phương với nó và lần lượt đi qua A, B, C, D. Phương trình tương ứng của các đường thẳng đó là 2x – 3y = 8, 2x – 3y = –6, 2x – 3y = –2, 2x – 3y = 19. Ta thấy rằng các điểm A, B, C nằm cùng một phía đối với d_4 và các điểm A, C, D cùng phía đối với d_2. Do đó dải mặt phẳng P với biên d_2, d_4 chứa miền tứ giác ABCD. Biên của P cắt Ox tại các điểm

$M_2(-3 ; 0)$, $M_4(\frac{19}{2} ; 0)$. Đường thẳng 2x – 3y = F cắt đoạn thẳng M_2M_4 tại điểm $M(\frac{F}{2} ; 0)$. Từ đó ta suy ra $-3\le\frac{F}{2}\le\frac{19}{2}\Leftrightarrow -6\le F\le 19$. Vì vậy min F = –6 đạt tại x = 0, y = 2 và max F = 19 đạt tại x = 2, y = –5.

18. Điều kiện của bài toán xác định miền tứ giác ABCD với A(1 ; 0), B(0 ; 3), C(0 ; 5), D(5 ; 0). Dải mặt phẳng P chứa miền tứ giác ABCD có biên là các đường thẳng $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\frac{5}{3}$ và $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow -\frac{5}{3}\le F\le\frac{5}{2}$. Vậy $\min F=-\frac{5}{3}$ tại x = 0, y = 5, $\max F=\frac{5}{2}$ tại x = 5, y = 0.

CHUYÊN ĐỀ 16

VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC $F = \dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ VỚI a, b, c, a', b', c' LÀ HẰNG SỐ VÀ x, y THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = r$.

Phân tích. Điều kiện bài toán xác định đường tròn (C) với tâm là gốc toạ độ O. Biểu thức F tương đương với phương trình

$$ax + by + c - F(a'x + b'y + c') = 0 \text{ (mẫu thức khác 0).}$$

Phương trình đó xác định chùm đường thẳng d phụ thuộc tham số F. Bài toán được đưa về tìm miền giá trị của F sao cho d và (C) có ít nhất một điểm chung.

Phương pháp. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

để tìm toạ độ tâm A của chùm đường thẳng (để mẫu thức khác 0). Chứng minh rằng (C) không có điểm chung với đường thẳng $a'x + b'y + c' = 0$.

Lập miền góc $\widehat{uAv}$ sao cho các cạnh Au, Av tiếp xúc với (C). Tìm các giao điểm M_1, M_2 của các đường thẳng Au và Av với trục Ox (hoặc Oy). Tìm giao điểm M của d với đoạn thẳng M_1M_2. Từ đó suy ra miền giá trị của F. Chú ý rằng nếu A nằm trong (C), thì mẫu thức của F bằng 0 với mọi x, y thoả mãn điều kiện Bài toán 1 và bài toán không có lời giải.

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện $(x-p)^2+(y-q)^2=r$.

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với x, y là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $a_ix+b_iy \le (\ge)\ c_i$.

Phương pháp. Tìm toạ độ các đỉnh của miền đa giác P. Biểu diễn miền đa giác đó. Biểu thức F tương đương với phương trình $ax+by+c=F(a'x+b'y+c')$ (mẫu thức khác 0). Phương trình đó xác định một chùm đường thẳng d phụ thuộc F. Tìm tâm K của chùm đường thẳng d từ hệ phương trình

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi đỉnh của đa giác nằm về một phía đối với đường thẳng $a'x+b'y+c'=0$. Tìm miền góc uKv nhỏ nhất chứa P với đỉnh K. Buộc d thuộc góc uKv để tìm miền giá trị của F. Nếu K thuộc P thì bài toán không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Bài toán 4. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với x, y là nghiệm của hệ gồm một phương trình bậc hai và nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài toán 5. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện $mx^2+ny^2=r$, trong đó m, n, r là các hằng số dương.

Phương pháp. Đặt $y=\sqrt{\frac{m}{n}}z$, khi đó

$$F=\frac{ax+b\sqrt{\frac{m}{n}}z+c}{a'x+b'\sqrt{\frac{m}{n}}z+c'}$$

và điều kiện đã cho là $x^2+z^2=\frac{r}{m}$. Bài toán 5 được đưa về Bài toán 1.

Bài toán 6. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện $m(x-p)^2+n(y-q)^2=r$, trong đó p, q, m, n, r là các hằng số thực $(m>0, n>0, r>0)$.

Bài toán 7. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện $mx^2 \pm xy + ny^2 = r$ ($m > 0$, $n > 0$, $r > 0$ là các số thực cho trước).

Phương pháp. Biến đổi điều kiện đã cho như sau : Đặt $x = p(u + v)$, $y = q(u - v)$, ta có $x^2 = p^2(u^2 + v^2 + 2uv)$, $y^2 = q^2(u^2 + v^2 - 2uv)$. Điều kiện đã cho tương đương với

$$mp^2(u^2 + v^2 + 2uv) \pm pq(u^2 - v^2) + nq^2(u^2 + v^2 - 2uv) = r$$

$$\Leftrightarrow (mp^2 \pm pq + nq^2)u^2 + (mp^2 \mp pq + nq^2)v^2 + 2uv(mp^2 - nq^2) = r.$$

Đặt $m_1 = (mp^2 \pm pq + nq^2)$, $n_1 = (mp^2 \mp pq + nq^2)$ và ta chọn các tham số p, q thoả mãn điều kiện $mp^2 = nq^2 \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$, khi đó điều kiện đã cho tương đương với điều kiện $m_1u^2 + n_1v^2 = r$. Bài toán 7 được đưa về Bài toán 5.

BÀI TẬP

1. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \frac{y}{x - 5}$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \frac{\sin t - 1}{\cos t + 3}$ với mọi t.
3. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \frac{x - 4}{y + 5}$ với x và y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 16$.
4. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \frac{b}{a - 5}$ với a, b thoả mãn điều kiện $(a - 2)^2 + (b + 1)^2 = 1$.
5. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \frac{x + y + 2}{x - y + 2}$ với x và y thoả mãn điều kiện $x - y = \frac{x^2 + y^2}{2}$.

6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{x+3y-2}{y-9}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x-4y \le 3 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2} \le 1 \\ 3x-y \ge -2. \end{cases} \qquad (*)$$

7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{y-10}{x+y+2}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1. \end{cases} \qquad (*)$$

8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{x-5}{y+6}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x-4y \le 3 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2} \le 1 \\ 3x-y \ge -2. \end{cases} \qquad (*)$$

9. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \dfrac{x+1}{y+1}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} y^2+x^2 = 4 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0. \end{cases}$$

10. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \dfrac{\cos t}{2\sin t+1}$ với $\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{3\pi}{4}$.

11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{x+\sqrt{6}y}{x-\sqrt{\dfrac{2}{3}}y+4}$ với x, y thoả mãn điều kiện $3x^2+2y^2=6$.

12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{x}{y+1}$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + 4y^2 = 1$.

13. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \dfrac{b+1}{a-3}$ với a, b thoả mãn điều kiện $(a + 1)^2 + 4(b - 2)^2 = 4$.

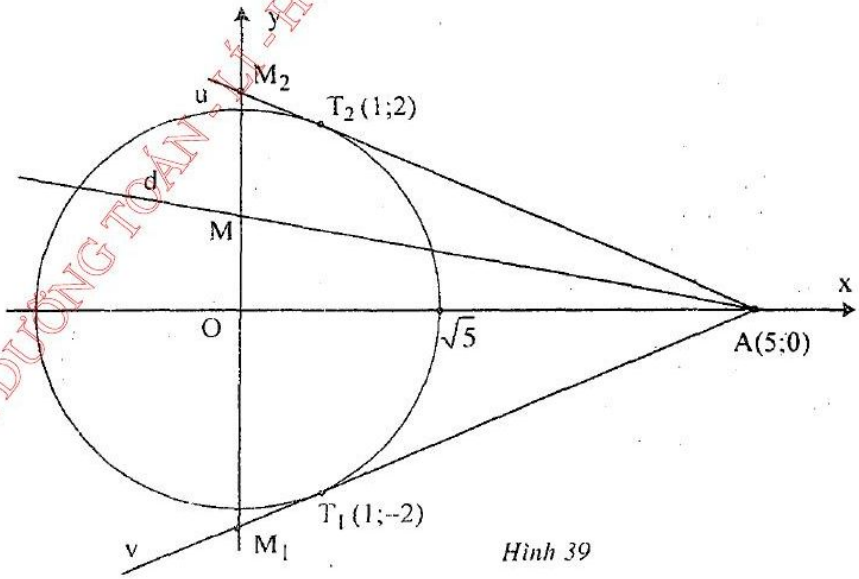
14. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x+2} = m \\ 9(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

15. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \dfrac{a+2b-4}{a-2b+8}$ với a, b thoả mãn điều kiện $a^2 - ab + 4b^2 = 2$.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. (H.39) Điều kiện đã cho xác định đường tròn với tâm O(0 ; 0). Rõ ràng đường thẳng $x - 5 = 0$ và đường tròn không có điểm chung nên F có nghĩa với mọi x, y thoả mãn điều kiện của bài toán. Biểu thức F được biến đổi thành phương trình $y - F(x - 5) = 0$.



Hình 39

BỒI DƯỠNG TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2-3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Phương trình này xác định đường thẳng d phụ thuộc vào F. Đường thẳng d đi qua điểm A(5 ; 0) cố định và điểm A nằm ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 5$. Các tiếp tuyến Au và Av của đường tròn có phương trình x + 2y = 5, x – 2y = 5 và các tiếp điểm tương ứng là $T_2(1 ; 2)$, $T_1(1 ; -2)$. Các tiếp tuyến đó cắt trục Oy tại các điểm tương ứng $M_2(0 ; \frac{5}{2})$, $M_1(0 ; -\frac{5}{2})$. Đường thẳng d cắt đoạn M_1M_2 tại M(0 ; –5F). Từ đó ta suy ra

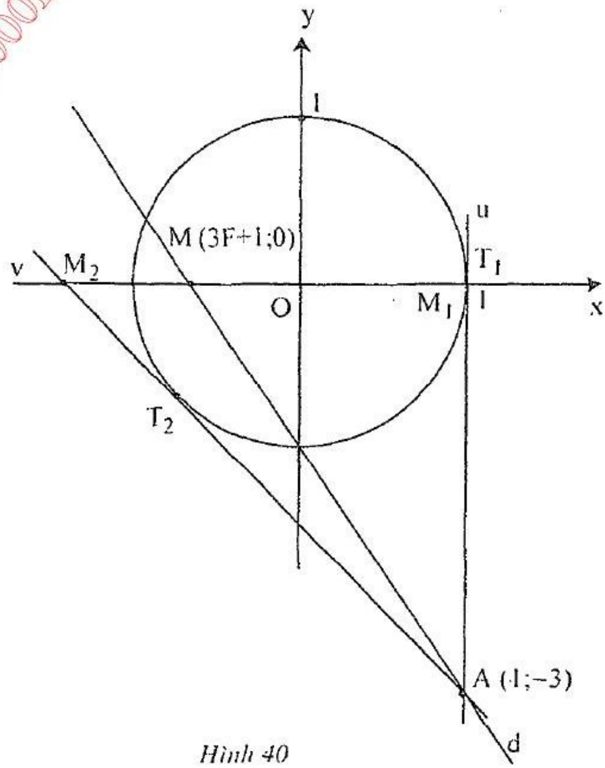
$$-\frac{5}{2} \le -5F \le \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le F \le \frac{1}{2}$$

$\min F = -\frac{1}{2}$ khi x = 1, y = 2 và $\max F = \frac{1}{2}$ khi x = 1, y = –2.

2. (H.40) Đặt x = sint, y = cost, khi đó $F = \frac{x-1}{y+3}$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Điều kiện đã cho xác định một đường tròn (C) và nó không có điểm chung với đường thẳng y + 3 = 0 nên F được xác định với mọi x, y thoả mãn điều kiện đó. Biểu thức F tương đương với phương trình

$$(x - 1) - F(y + 3) = 0.$$

Đây là phương trình của một đường thẳng d phụ thuộc F. Điểm A(1 ; –3) là điểm cố định của d và nằm ngoài (C). Gọi Au, Av là các tiếp tuyến của (C). Phương trình các tiếp tuyến đó có dạng x = 1 và 4x + 3y = –5. Các tiếp



Hình 40

điểm tương ứng $T_1(1\ ;\ 0)$, $T_2(-\frac{4}{5}\ ;\ -\frac{3}{5})$. Các giao điểm của Au, Av với trục Ox là $M_1(1\ ;\ 0)$, $M_2\ (-\frac{5}{4}\ ;\ 0)$. Đường thẳng d cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại điểm $M(3F + 1\ ;\ 0)$. Từ đó ta suy ra $-\frac{5}{4} \le 3F + 1 \le 1$. Vì vậy min $F = -\frac{3}{4}$ đạt tại $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ và max $F = 0$ đạt tại $x = 1$, $y = 0$.

3. ĐS : min $F = -\frac{40}{9}$ đạt tại $x = -\frac{1476}{1681}$, $y = -\frac{6560}{1681}$ và max $F = 0$ đạt tại $x = 4$, $y = 0$.

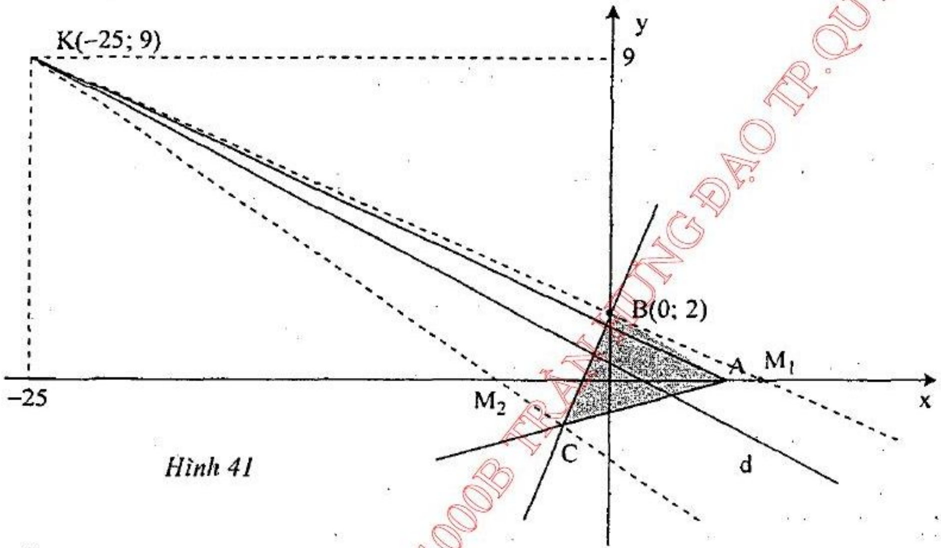
4. Đặt $x = a - 2$, $y = b + 1$, ta tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = \frac{y-1}{x-3}$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

ĐS : min $F = 0$ đạt tại $x = 0$, $y = 1$ và max $F = \frac{3}{4}$ đạt tại $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$.

5. Điều kiện đã cho tương đương với điều kiện $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$. Đặt $a = x - 1$, $b = y + 1$, khi đó $F = \frac{a+b+2}{a-b+4}$ với a, b thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 = 2$. Trong hệ toạ độ Oab ta thấy rằng đường thẳng $a - b + 4 = 0$ không có điểm chung với đường tròn $a^2 + b^2 = 2$, vì khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng đó lớn hơn bán kính đường tròn. Vì vậy mẫu thức của F khác không với điều kiện đã cho. Chùm đường thẳng

$a + b + 2 = F(a - b + 4)$ đi qua điểm cố định $M(-3\ ;\ 1)$. Các đường thẳng trong chùm tiếp xúc với đường tròn có phương trình là $a + b + 2 = 0$ và $a - 7b + 10 = 0$. Các giao điểm của các tiếp tuyến đó với Oa là $M_1(-2\ ;\ 0)$, $M_2(-10\ ;\ 0)$; $M\ (\frac{2-4F}{F-1}\ ;\ 0)$ là giao điểm của đường thẳng bất kì trong họ với Oa. Từ điều kiện $-10 \le \frac{2-4F}{F-1} \le -2$ ta suy ra được giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của F.

6. (H.41) Điều kiện (*) xác định miền tam giác ABC với các đỉnh A(3 ; 0), B(0 ; 2), C(–1 ; –1). Rõ ràng các đỉnh của miền tam giác ABC nằm về một phía đối với đường thẳng $y - 9 = 0$. Do đó miền tam giác ABC không có điểm chung với đường thẳng $y - 9 = 0$ và mẫu số của F khác không với mọi x, y thoả mãn (*).



Hình 41

Biểu thức F tương đương với phương trình

$$(x + 3y - 2) - F(y - 9) = 0.$$

Phương trình đó xác định đường thẳng d phụ thuộc F và d đi qua điểm K(–25 ; 9) với mọi F. Toạ độ K không thoả mãn điều kiện (*) nên K không thuộc miền tam giác ABC. Các đường thẳng KA, KB, KC có phương trình tương ứng là $9x + 28y = 27$, $7x + 25y = 50$, $5x + 12y = -17$.

Xét miền góc BKC được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} 7x + 25y \le 50 \\ 5x + 12y \ge -17. \end{cases}$$

Miền góc đó chứa điểm A, do đó miền tam giác ABC nằm trong miền góc BKC. Biên của miền góc BKC cắt trục Ox tại các điểm $M_1(\frac{50}{7}; 0)$ và $M_2(-\frac{17}{5}; 0)$.

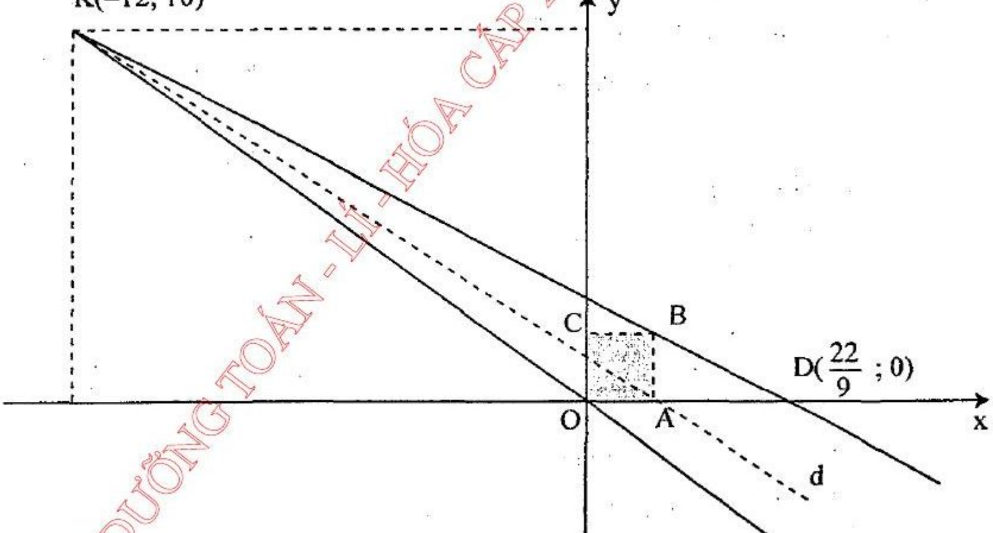
Đường thẳng d thuộc miền góc BKC khi và chỉ khi giao điểm M(2 – 9F ; 0) thuộc đoạn thẳng M_1M_2.

Từ đó ta có $-\frac{17}{5} \le 2 - 9F \le \frac{50}{7} \Leftrightarrow -\frac{4}{7} \le F \le \frac{3}{5}$.

Vì vậy min $F = -\frac{4}{7}$ đạt tại x = 0, y = 2 và max$F = \frac{3}{5}$ đạt tại x = y = –1.

7. (H.42) Điều kiện (*) xác định miền hình vuông OABC với O(0 ; 0), A(1 ; 0), B(1 ; 1), C(0 ; 1). Rõ ràng các đỉnh của miền hình vuông OABC nằm về một phía đối với đường thẳng x + y + 2 = 0 do đó mẫu thức của F khác không với mọi x, y thoả mãn (*). Biểu thức F tương ứng với phương trình y – 10 = F(x + y + 2). Đây là phương trình của một đường thẳng d phụ thuộc tham số F và nó đi qua điểm K(–12 ; 10). Rõ ràng, K không thuộc miền OABC. Ta lập miền góc nhỏ nhất với đỉnh K chứa miền OABC. Các đường thẳng KO, KA, KB, KC có phương trình tương ứng là :

$$5x + 6y = 0,\ 10x + 13y = 10,\ 9x + 13y = 22,\ 3x + 4y = 4.$$



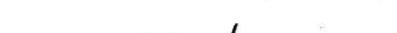
Hình 42

Xét miền góc $\widehat{OKB}$ được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} 9x + 13y \le 22 \\ 5x + 6y \ge 0. \end{cases} \quad (**)$$

Tọa độ các điểm O, A, B, C là nghiệm của (**) do đó miền góc $\widehat{OKB}$ chứa miền OABC. Biên của miền góc $\widehat{OKB}$ cắt Ox tại các điểm O(0 ; 0), D($\frac{22}{9}$; 0). Đường thẳng d cắt Ox tại điểm M($-2-\frac{10}{F}$; 0) ($F \neq 0$). Để d thuộc miền góc $\widehat{BKO}$ cần và đủ là M thuộc đoạn OD. Từ đó ta có $-\frac{4}{9} \le \frac{1}{F} \le -\frac{1}{5}$ và $\max \frac{1}{F} = -\frac{1}{5}$, $\min \frac{1}{F} = -\frac{4}{9} \Rightarrow \min F = -5$ và $\max F = -\frac{9}{4}$ tương ứng đạt tại x = y = 0 và $x = \frac{22}{9}$, y = 0.

9. (H.43) Biểu thức F có nghĩa với mọi x, y thoả mãn điều kiện bài toán và tương đương với phương trình x + 1 − F (y + 1) = 0. Phương trình này xác định chùm đường thẳng d phụ thuộc F có tâm là K(−1 ; −1), điểm này nằm trong cung phần tư thứ ba của mặt phẳng toạ độ. Xét các điểm A(2 ; 0) và B(0 ; 2) trên biên của P. Các đường thẳng KA, KB cắt (C) lần thứ hai tại các điểm A', B' khác phía với các điểm A, B đối với Ox. Điều đó chứng tỏ các đường thẳng KA, KB chỉ cắt cung nhỏ AB tại A và B và miền góc $\widehat{AKB}$ chứa cung đó. Phương trình các đường thẳng KA, KB tương ứng là x − 3y = 2, 3x − y = −2 và $M_1(2 ; 0)$, $M_2(-\frac{2}{3} ; 0)$ là giao điểm của các đường thẳng đó với Ox. Đường thẳng d cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại điểm M(F − 1 ; 0).

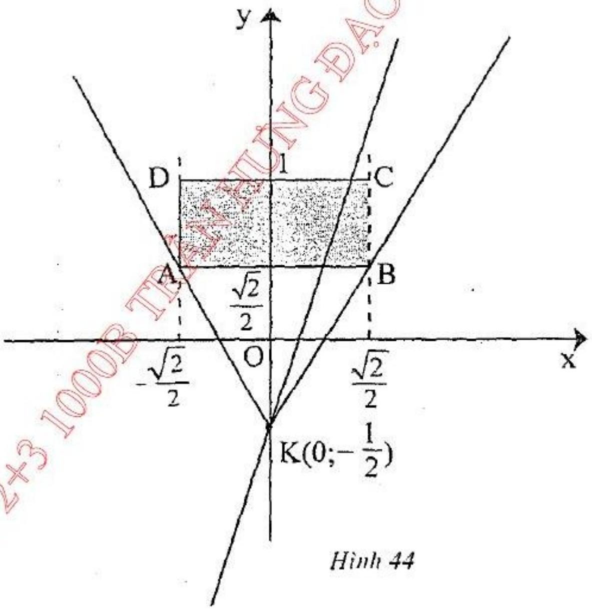


Hình 43

Từ đó ta suy ra $-\frac{2}{3} \le F - 1 \le 2$ và $\min F = \frac{1}{3}$ đạt tại $x = 0$, $y = 2$ và $\max F = 3$ đạt tại $x = 2$, $y = 0$.

10. (H.44) Đặt $x = \cos t$ và $y = \sin t$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \frac{x}{2y+1}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ |x| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le 1. \end{cases}$$

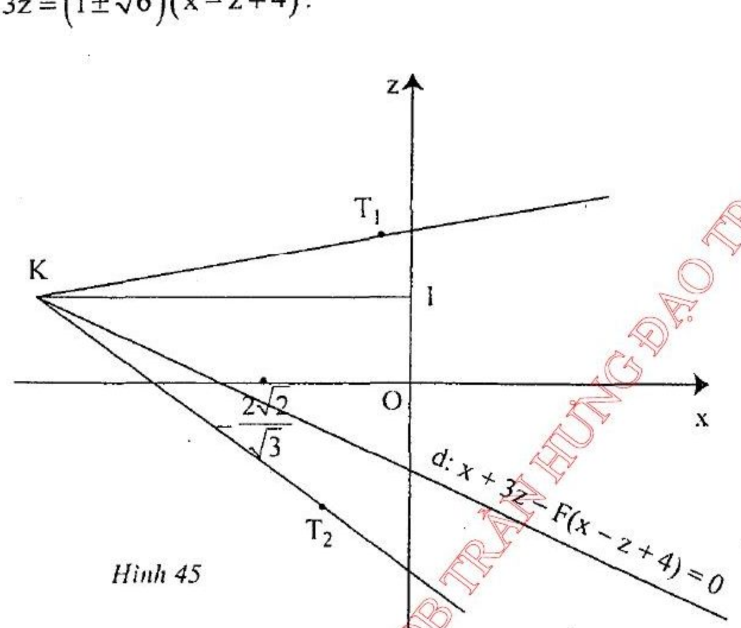


Hình 44

Điều kiện đó xác định phần chung của đường tròn đơn vị với miền chữ nhật ABCD, trong đó $A(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$, $C(\frac{\sqrt{2}}{2};1)$, $D(-\frac{\sqrt{2}}{2};1)$. Rõ ràng các điểm A và B thuộc đường tròn đơn vị. Miền góc chứa phần chung đó có biên là các đường thẳng $x+(2-\sqrt{2})y+1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ và $x-(2-\sqrt{2})y-1+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

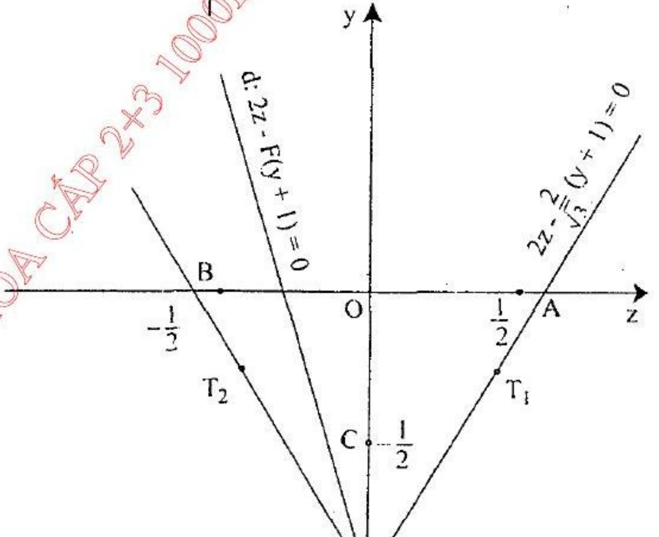
11. (H.45) Đặt $y = \sqrt{\frac{3}{2}}z$, khi đó bài toán được đưa về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{x+3z}{x-z+4}$ với mọi x, z thoả mãn điều kiện $x^2 + z^2 = 2$.

Miền góc chứa đường tròn $x^2+z^2=2$ có biên là các đường thẳng $x+3z=\left(1\pm\sqrt{6}\right)\left(x-z+4\right)$.


z
T$_1$
K
I
O
x
$-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
T$_2$
d: x + 3z – F(x – z + 4) = 0

Hình 45

12. (H.46) Đặt $x = 2z$, khi đó bài toán được đưa về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F=\dfrac{2z}{y+1}$ với y, z thoả mãn điều kiện $y^2+z^2=\dfrac{1}{4}$. Miền góc với biên là các đường thẳng $2z\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(y+1\right)=0$ chứa đường tròn $y^2+z^2=\dfrac{1}{4}$.


y
d: 2z - F(y + 1) = 0
$2z-\frac{2}{\sqrt{3}}(y+1)=0$
B
$-\frac{1}{2}$
O
$\frac{1}{2}$
A
z
T$_2$
T$_1$
C
$-\frac{1}{2}$
-1
K

Hình 46

13. Đặt $x = a + 1$, $y = b - 2$ ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \frac{y+3}{x-4}$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + 4y^2 = 4$. Đặt $z = 2y$, khi đó

$F = \frac{\frac{z}{2}+3}{x-4}$ với $x^2 + z^2 = 4$.

14. Đặt $u = 3(x + 1)$, $v = y - 1$, hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{u+3v}{u+3} = m \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

Xét đường thẳng $m(u + 3) = u + 3v$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để đường thẳng này có điểm chung với đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.

15. Đặt $a = p(x + y)$, $b = q(x - y)$ và chọn $p = 2$, $q = 1$. Điều kiện đã cho tương đương với $3x^2 + 5y^2 = 1$ và biểu thức $F = \frac{x-1}{y+1}$. Đặt $u = \sqrt{3}x$, $v = \sqrt{5}y$, khi đó $F = \sqrt{\frac{5}{3}}.\left(\frac{u-\sqrt{3}}{v+\sqrt{5}}\right)$ với $u^2 + v^2 = 1$.

CHUYÊN ĐỀ 17

VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT HOẶC NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CÓ DẠNG

$$F = (x-u)^2 + (y-v)^2$$

VỚI x, y, u, v THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Lời giải của các bài toán trong chuyên đề này dựa trên các mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1. Cho đường tròn (O ; R) và điểm P không trùng với tâm của đường tròn đó. Đường thẳng OP cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Với mọi điểm M trên đường tròn ta có $\min(PA ; PB) \le PM \le \max(PA ; PB)$.

Chứng minh. Giả sử P nằm trên bán kính OA, ta có :

$$PM \ge OM - OP = OA - OP = PA \text{ và } PM \le OM + OP = OB + OP = PB.$$

Vì $\min(PA ; PB) \le PA$ và $PB \le \max(PA ; PB)$, từ đó ta được điều cần chứng minh. Các vị trí còn lại của P được chứng minh tương tự.

Mệnh đề 2. Cho đường tròn (O ; R) và điểm P không trùng với tâm của đường tròn đó. Kí hiệu A, B là giao điểm của OP và đường tròn. Xét dây cung CD của đường tròn không cắt đường kính AB, khi đó :

a) $\min(PA ; PB) \le PM \le \max(PA ; PB)$ với mọi điểm M trên cung CD chứa các điểm A và B.

b) $\min(PC ; PD) \le PM \le \max(PC ; PD)$ với mọi điểm M trên cung CD không chứa các điểm A và B.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1 kết quả câu a) là hiển nhiên, ta chứng minh câu b). Coi C gần A hơn D. Trường hợp P thuộc tia OA, khi đó tia OC nằm trong góc $\widehat{POM}$. Hai tam giác OPM và OPC có $\widehat{POM} > \widehat{POC}$, OM = OC và cạnh chung OP do đó PM > PC. Tương tự với hai tam giác OPM và OPD, ta có PM < PD. Vì vậy

$$\min(PC\,;\,PD) \le PM \le \max(PC\,;\,PD).$$

Trường hợp P trên tia OB lập luận tương tự.

Mệnh đề 3. Cho đường tròn (O ; R) và điểm P không trùng với tâm của đường tròn đó. Kí hiệu A, B là giao điểm của OP và đường tròn. Giả sử dây cung CD của đường tròn cắt bán kính OB tại Q.

a) Nếu P trên tia OA thì $\min(PC\,;\,PD) \le PM \le PB$ với mọi M trên cung $\overset{\frown}{CBD}$.

b) Nếu P trên tia OB thì $PB \le PM \le \max(PC\,;\,PD)$ với mọi M trên cung $\overset{\frown}{CBD}$.

Chứng minh

a) Nếu M trên cung $\overset{\frown}{CB}$ thì tia OC nằm trong góc $\widehat{POM}$. Hai tam giác OPM và POC có OP chung, OM = OC và $\widehat{POM} > \widehat{POC}$ do đó PM > PC. Tương tự với M trên cung $\overset{\frown}{BD}$, ta có PM > PD. Theo Mệnh đề 1 ta có $PM \le \max(PA\,;\,PB)$. Vì PA < PB nên max(PA ; PB) = PB.

b) Với M thuộc cung $\overset{\frown}{CB}$ thì tia OM nằm trong góc $\widehat{POC}$. Lập luận tương tự đối với hai tam giác POC và POM ta suy ra PM < PC. Với M trên cung $\overset{\frown}{BD}$, ta có PM < PD. Vì PB < PA và theo Mệnh đề 1 ta suy ra min(PB ; PA) = PB.

Mệnh đề 4. Cho đường tròn (O ; R) và đường thẳng d không có điểm chung với O. Kí hiệu AB là đường kính của đường tròn vuông góc với d, H là giao điểm của AB và d, M là điểm bất kỳ trên đường tròn và N là hình chiếu vuông góc của M trên d khi đó ta có

$$\min(AH; BH) \le MN \le \max(AH; BH).$$

Chứng minh. Coi B giữa hai điểm A và H. Ta có

$$MN \le MH \le MO + OH = R + OH.$$

Dấu bằng trong bất đẳng thức xảy ra khi M trùng với A. Gọi M' là hình chiếu của M trên đường thẳng AB, ta có MN = M'H. Vì tam giác AMB vuông tại M nên M' nằm trên đường kính AB, kéo theo B nằm giữa hai điểm M' và H. Ta có $M'H \ge BH \Rightarrow MN \ge BH$. Nếu d có điểm chung với đường tròn thì $\min MN = 0$.

Mệnh đề 5. Cho hai đường tròn $(O_1 ; R_1)$ và $(O_2 ; R_2)$ nằm ngoài nhau. Giả sử A, B là các điểm lần lượt thuộc các đường tròn đó, khi đó ta có $O_1O_2 - R_1 - R_2 \le AB \le R_1 + R_2 + O_1O_2$.

Chứng minh. Kí hiệu C, D, P, Q là giao điểm của đường thẳng O_1O_2 với các đường tròn, ở đây C, P trên O_1, D, Q trên O_2 và các điểm C, D nằm trên đoạn PQ. Gọi B_1, B_2 là giao điểm của AO_2 và đường tròn (O_2). Coi B_1 nằm giữa A và B_2. Ta có $AB \le AB_2 = AO_2 + R_2$, $O_2A \le O_2P = O_2O_1 + R_1$. Vì vậy $AB \le R_1 + R_2 + O_1O_2$.

Tương tự $AB \ge AB_1 = AO_2 - R_2$, $O_2A \ge O_2C = O_1O_2 - R_1$. Do đó $AB \ge O_1O_2 - R_1 - R_2$.

Mệnh đề 6. Cho hai đường tròn $(O_1 ; R_1)$ và $(O_2 ; R_2)$ đựng nhau $(R_1 > R_2)$. Gọi A, B là các điểm lần lượt thuộc các đường tròn đó, khi đó ta có $R_1 - R_2 - O_1O_2 \le AB \le R_1 + R_2 + O_1O_2$.

Mệnh đề 7. Cho tam giác ABC với AH là đường cao.

a) Nếu các góc kề với cạnh BC nhọn thì $AH \le AM \le \max(AB; AC)$ với mọi điểm M nằm trên cạnh BC.

b) Nếu tồn tại một góc kề với cạnh BC tù thì

$$\min(AB ; AC) \le AM \le \max(AB; AC)$$

với mọi điểm M nằm trên cạnh BC.

Chứng minh

a) Nếu M trên đoạn CH thì $\widehat{AMC} > 90^0 \Rightarrow AM < AC$. Nếu M trên đoạn BH thì $\widehat{AMB} > 90^0 \Rightarrow AM < AB$. Do đó $AM \le \max(AB; AC)$ với mọi M trên cạnh BC.

b) Điểm H không thuộc cạnh BC. Từ tam giác AMB hoặc tam giác AMC có góc tù tại M nên ta suy ra điều cần chứng minh.

Mệnh đề 8. Cho đường elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng d. Nếu d và E có không quá một điểm chung, thì mọi điểm M thuộc (E) nằm về một phía đối với d.

Chứng minh. Giả sử y = kx + q là phương trình đường thẳng d. Đặt $z = \frac{a}{b}y$, khi đó phương trình của (E) có dạng $x^2 + z^2 = a^2$ và phương trình của d có dạng $z = \frac{ak}{b}x + \frac{aq}{b}$. Ta biết rằng phép đổi biến đó là một phép dãn biến (E) thành đường tròn (E') : $x^2 + z^2 = a^2$ và d thành đường thẳng d' : $z = \frac{ak}{b}x + \frac{aq}{b}$. Nếu d và (E) có không quá một điểm chung thì (E') và d' có không qua một điểm chung. Ta cũng biết rằng nếu một đường thẳng có không quá một điểm chung với một đường tròn thì mọi điểm của đường tròn nằm trong cùng một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng đó. Vì vậy mọi điểm của (E) nằm trong cùng một nửa mặt phẳng với bờ là d. Trường hợp d có phương trình x = m với $|m| \ge a$. Ta thấy rằng mọi điểm M (x_0; y_0) thuộc (E) thoả mãn điều kiện $|x_0| \le a$. Từ các kết quả trên ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$ với a, b, r > 0 là các hằng số cho trước.

Phân tích. Điều kiện của bài toán xác định một đường tròn tâm S. Nếu M(x ; y) là điểm thuộc (S) thì $F = OM^2$, trong đó O là gốc toạ độ. Kí hiệu A, B là giao điểm của đường thẳng SM và đường tròn (S), ta có bất đẳng thức $\min\{OA;OB\} \le OM \le \max\{OA;OB\}$. Dấu bằng trong các bất đẳng thức xảy ra khi M trùng với A hoặc B.

Cách tìm. Viết phương trình đường thẳng SM. Tìm giao điểm A, B của SM và (S). Khi đó $\min F = \min\{OA^2;OB^2\}$, $\max F = \max\{OA^2;OB^2\}$.

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases}(x-p)^2+(y-q)^2=r\\ ax+by\le(\ge)c\end{cases}$$

ở đây a, b, c, p, q, r là các hằng số cho trước (r > 0).

Phân tích. Điều kiện của bài toán xác định một cung CD của đường tròn tâm S(p ; q). Bài toán được đưa về khảo sát độ dài OM với M thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ và O là gốc toạ độ. Dựa vào Mệnh đề 2 và 3 ta tiến hành các bước sau :

Viết phương trình đường thẳng SO, trong đó S(p ; q). Tìm giao điểm A, B của SO và (S). Tìm giao điểm Q của đường thẳng ax + by = c và đường thẳng AB. Xác định giao điểm C và D của đường thẳng đó với đường tròn S. Hãy xác định vị trí của O đối với một trong các tia tia SA hoặc SB. Tính các độ dài OC, OD, OA, OB.

Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn các điều kiện $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r$ và au + bv = c, trong đó p, q, a, b, c và r > 0 là các hằng số cho trước.

Phân tích. Điều kiện đã cho xác định một đường tròn (S) và một đường thẳng d. Nếu A(x ; y), B(u ; v) là các điểm lần lượt trên (S) và d thì $F = AB^2$. Bài toán được đưa về tìm độ dài nhỏ nhất và lớn nhất của đoạn AB. Từ Mệnh đề 4 ta giải bài toán đó như sau :

Cách giải. Viết phương trình đường thẳng đi qua S(p ; q) và vuông góc với d. Tìm giao điểm A, B của đường thẳng đó và (S). Tính các khoảng cách từ A và B tới d. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-p)^2+(y-q)^2=r\\ ax+by=c.\end{cases}$$

Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì bình phương khoảng cách lớn nhất từ A và B tới d là maxF và bình phương khoảng cách nhỏ nhất từ A và B tới d là minF. Nếu hệ phương trình có nghiệm thì min F = 0 đạt tại nghiệm đó.

Bài toán 4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$F=(x-u)^2+(y-v)^2$$

với x, y, u, v thoả mãn điều kiện

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r \text{ và } (u-a)^2+(v-b)^2=c,$$

trong đó p, q, a, b và c > 0, r > 0 là các hằng số cho trước.

Phân tích. Điều kiện đã cho xác định hai đường tròn trên cùng một hệ toạ độ. Nếu A(x ; y) và B(u ; v) thuộc các đường tròn đó thì $F = AB^2$. Bài toán được đưa về tìm độ dài lớn nhất và nhỏ nhất của đoạn AB.

Cách giải. Chứng tỏ hai đường tròn nằm ngoài nhau. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $O_1(p ; q)$ và $O_2(a ; b)$. Tìm giao điểm của O_1O_2 với hai đường tròn.

Bài toán 5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y là nghiệm của một hệ gồm ba hoặc bốn bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng

$$\begin{cases}a_k x+b_k y\le c_k\\ k=1,2,3,4.\end{cases}$$

Phân tích. Điều kiện đã cho xác định một miền tam giác hoặc tứ giác trên mặt phẳng toạ độ. Nếu M là điểm thuộc miền này thì $F = OM^2$. Để khảo sát OM, ta nối O với các đỉnh của miền, khi đó miền được chia thành các tam giác chung đỉnh O và các cạnh đối diện với O là cạnh của miền.

Cách giải. Sử dụng Mệnh đề 7 vào các tam giác để tìm độ dài nhỏ nhất và lớn nhất của OM.

Bài toán 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện $ax^2 + by^2 = c$ và $pu + qv = k$. Trong đó p, q, k, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ là các hằng số cho trước.

Phân tích. Điều kiện đã cho xác định đường thẳng d có phương trình $px + qy = k$ và elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{\frac{c}{a}} + \dfrac{y^2}{\frac{c}{b}} = 1$. Nếu A(x ; y) thuộc (E) và B(u ; v) thuộc d thì $F = AB^2$. Bài toán được đưa về tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn AB.

Cách tìm. Viết phương trình đường thẳng d' cùng phương với d sao cho d' chỉ có một điểm chung với (E). Tức là tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ px + qy = m \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất. Tồn tại hai giá trị của m thoả mãn điều kiện đó. Vì vậy có hai đường thẳng d'. Kí hiệu A là điểm chung của d'và (E) gần d nhất, theo Mệnh đề 8 ta suy ra d và (E) nằm khác phía đối với d'. Nếu B là hình chiếu của A trên d thì độ dài AB là ngắn nhất. Nếu một trong hai giá trị của m bằng k thì độ dài AB = 0 và min F = 0.

BÀI TẬP

1. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = x + y + \dfrac{7}{4}$.
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ 2x + 4y = 11 - m. \end{cases}$$

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=1\\ y \geq x.\end{cases}$$

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hệ sau đây có nghiệm.

$$\begin{cases}x^2+y^2=m\\ 8x+2y=12+m \text{ (m là tham số).}\\ x+y \geq 6\end{cases}$$

6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases}(x+4)^2+(y-4)^2=40\\ y \geq m\end{cases} \text{ (m là một tham số).}$$

7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = (x-2)^2 + (y-3)^2$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ x+y \geq 0.\end{cases}$$

8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = (x-u)^2 + (y-v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện $3u + 4v = 20$ và $x^2 + y^2 = 9$.

9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = (x-u)^2 + (y-v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện sau đây $u + v = m$ và $x^2 + y^2 = 8$ (m là tham số).

10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = (x+u)^2 + (y+v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện $u + v = 6$ và $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$.

11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = u^2 + v^2 + 2ux + 2vy$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện $u - v = 1$ và $x^2 + y^2 = 8$.

12. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+v^2-2ux-2vy=m-4\\ x^2+y^2=4\\ 2u+v=6\end{cases}$$

với m là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hệ có nghiệm.

13. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn các điều kiện $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ và $u^2 + (v + 2)^2 = 1$.

14. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn các điều kiện $x^2 + y^2 = m$ và $(u - 3)^2 + (v - 4)^2 = 1$ với m là tham số thoả mãn điều kiện $0 < m < 25$.

15. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn các điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ và $(u - 4)^2 + v^2 = 25$.

16. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ u^2 + (v - 2)^2 = 9 \\ 2x.u + 2y.v + 4v = m - 6. \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hệ có nghiệm.

17. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} y \le 2 \\ 2x + y \ge 2 \\ x \ge y + 1. \end{cases}$$

18. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} 1 \le x + y \le 2 \\ 1 \le x - y \le 2. \end{cases}$$

19. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$ với x, y thoả mãn điều kiện $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

20. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$ với x, y thoả mãn điều kiện $\begin{cases} y \ge 0 \\ x \ge 0 \\ x \le y - 2. \end{cases}$

21. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện $x^2 + 2y^2 = 3$ và $u - v = 6$.

22. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = (x + u)^2 + (y + v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện $2x^2 + y^2 = 4$ và $u - v = 6$.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

3. Phương trình $2x + 4y = 11 - m$ tương đương với phương trình $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 11 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Bài toán được đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của $F = x^2 + y^2$ với x, y thoả mãn điều kiện $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$, ở đây $F = m$.

5. Phương trình thứ hai trong hệ tương đương với phương trình

$$8x + 2y = 12 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5.$$

Bài toán được đưa về tìm m để $m = x^2 + y^2$ có giá trị nhỏ nhất với mọi x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ x + y \geq 6. \end{cases}$$

7. Đặt $u = x - 2$, $v = y - 3$ khi đó $F = u^2 + v^2$ với u, v thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} (u+2)^2 + (v+3)^2 = 25 \\ u + v + 5 \geq 0. \end{cases}$$

10. Đặt $z = -u$ và $t = -v$, khi đó $F = (x - z)^2 + (y - t)^2$ với x, y, z, t thoả mãn điều kiện $z + t = -6$ và $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$.

11. Ta viết lại

$$F + 8 = u^2 + v^2 + 2ux + 2vy + x^2 + y^2 = (x + u)^2 + (y + v)^2.$$

16. Bài toán trên được đưa về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của $m = (x + u)^2 + (y + v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn các điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ và $u^2 + (v - 2)^2 = 9$.

19. Đặt $u = x - \frac{3}{2}$, $v = y - \frac{3}{2}$ bài toán được đưa về dạng $F = u^2 + v^2$ với u, v thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2} \le u \le \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{3}{2} \le v \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ vì } \begin{cases} x \le 2 \\ y \le 2. \end{cases}$$

20. Cách giải tương tự Bài 19.

21. Trong cùng một hệ toạ độ điều kiện của bài toán xác định một elip $x^2 + y^2 = 3$ và một đường thẳng d có phương trình $x - y = 6$. Xét đường thẳng d' có phương trình $x - y = m$ và hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x - y = m \end{cases}$.

Với $m = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất và các nghiệm là $A_1\left(\sqrt{2}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right); A_2\left(-\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Khoảng cách từ các điểm A_1 và A_2 đến d tương ứng bằng $\dfrac{3}{2}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ và $\dfrac{3}{2}\left(2\sqrt{2} + 1\right)$. Vậy khoảng cách từ A_1 tới d nhỏ nhất. Đường thẳng d_1 vuông góc với d và đi qua A_1 có phương trình $x + y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Giao điểm B của d_1 và d có toạ độ là $(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 3 ; \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - 3)$. Từ đó $\min F = \dfrac{9}{4}\left(2\sqrt{2} - 1\right)^2$ đạt được tại điểm có toạ độ trùng với toạ độ điểm A_1 và điểm có toạ độ trùng với toạ độ điểm B.

22. Viết lại $F = \{x - (-u)\}^2 + \{y - (-v)\}^2$ với điều kiện $2x^2 + y^2 = 4$ và $(-u) - (-v) = -6$. Bài toán được đưa về $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện $2x^2 + y^2 = 4$ và $u - v = -6$.

CHUYÊN ĐỀ 18

MỘT VÀI DẠNG TOÁN CỰC TRỊ CÓ THỂ ĐƯA VỀ DẠNG TUYẾN TÍNH VÀ PHÂN TUYẾN TÍNH

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$F = \sqrt{a - bx^2} + cx$$

với x thuộc miền xác định của F và $a > 0$, $b > 0$, c là các số thực cho trước.

Phương pháp. Đặt $y = \sqrt{\frac{a}{b} - x^2}$, ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = cx + \sqrt{b}y$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{a}{b}. \end{cases}$$

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$F = \sqrt{a - b(x+p)^2} + cx$$

với x thuộc miền xác định của F và $a > 0$, $b > 0$. c, p là các hằng số.

Phương pháp. Đặt $z = x + p$ và đưa cách giải bài toán này về bài toán 1.

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$F = p\sqrt{a + bx} + q\sqrt{c + dx}$$

với a, b, c, d, p, q là các hằng số thoả mãn các điều kiện $bd < 0$ và $q = \pm 1$.

Phương pháp. Coi b > 0 khi đó d < 0 và đặt $y = \sqrt{\frac{a}{b}+x}$, $z = \sqrt{\frac{c}{-d}-x}$ ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = p\sqrt{b}\,y + q\sqrt{-d}\,z$ với y, z thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} y^2+z^2 = \frac{a}{b}-\frac{c}{d} \\ y \geq 0 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán 4. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{p_1\sqrt{a+bx}+q_1\sqrt{c+dx}+r_1}{p_2\sqrt{a+bx}+q_2\sqrt{c+dx}+r_2}$$

với a > 0 , b, c > 0, d, p_1, p_2 q_1, q_2, r_1, r_2 là các hằng số thoả mãn các điều kiện bd < 0 và $q_1 = \pm 1$, $q_2 = \pm 1$

Phương pháp. Coi b > 0, khi đó d < 0 và đặt $y = \sqrt{\frac{a}{b}+x}$, $z = \sqrt{\frac{c}{-d}-x}$ ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$F = \frac{p_1\sqrt{b}y+q_1\sqrt{-d}z+r_1}{p_2\sqrt{b}y+q_2\sqrt{-d}z+r_2}$$

với y, z thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} y^2+z^2 = \frac{a}{b}-\frac{c}{d} \\ y \geq 0 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán 5. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{\alpha\sqrt{a-x^2}+bx+c}{\beta\sqrt{a-x^2}+px+q}$$

với a > 0, b, c, p, q, α, β là các hằng số.

Phương pháp. Đặt $y = \sqrt{a - x^2}$, khi đó bài toán được đưa về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{\alpha y + bx + c}{\beta y + px + q}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ 0 \le y \le \sqrt{a}. \end{cases}$$

Bài toán 6. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{\alpha\sqrt{a - kx^2} + bx + c}{\beta\sqrt{a - kx^2} + px + q}$$

với $a > 0$, $k > 0$, b, c, p, q, α, β là các hằng số.

Phương pháp. Đặt $y = \sqrt{\dfrac{a}{k} - x^2}$, khi đó bài toán được đưa về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{\alpha\sqrt{k}y + bx + c}{\beta\sqrt{k}y + px + q}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a}{k} \\ 0 \le y \le \sqrt{\dfrac{a}{k}}. \end{cases}$$

BÀI TẬP

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các biểu thức :

1. $F = \sqrt{5 - x^2} + 2x$.
2. $F = \sqrt{13 - 9x^2} + 2x$.
3. $F = \sin t + \sqrt{2 + \cos^2 t}$ với $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. $F = 2\sqrt{9 + 4z - z^2} - 3z$ với z thuộc miền xác định của F.
5. $F = 2\sqrt{4 - x} - \sqrt{1 + x}$.

6. $F=\sqrt{4-a}+\sqrt{1+3a}$.

7. $F=\sqrt{4+9\cos^2 t}+\sqrt{1-4\cos^2 t}$.

8. $F=\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{3-x}+2\sqrt{1+x}+3}$.

9. $F=\dfrac{\sqrt{3-a}-2}{\sqrt{1+a}+1}$.

10. $F=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{2x+3}$.

11. $F=\dfrac{x-2}{\sqrt{9-x^2}+5}$.

12. $F=\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}-x-3}$.

13. $F=\dfrac{\sqrt{4-9x^2}+1}{2x+3}$ với $0\le x\le \dfrac{2}{3}$.

14. $F=\dfrac{x-2}{\sqrt{9-4x^2}+1}$.

15. $F=\dfrac{x}{\sqrt{9-4x^2}+x+4}$.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. (H.47) Đặt $y=\sqrt{5-x^2}$ khi đó $F = 2x + y$. Ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F với x, y thoả mãn điều kiện

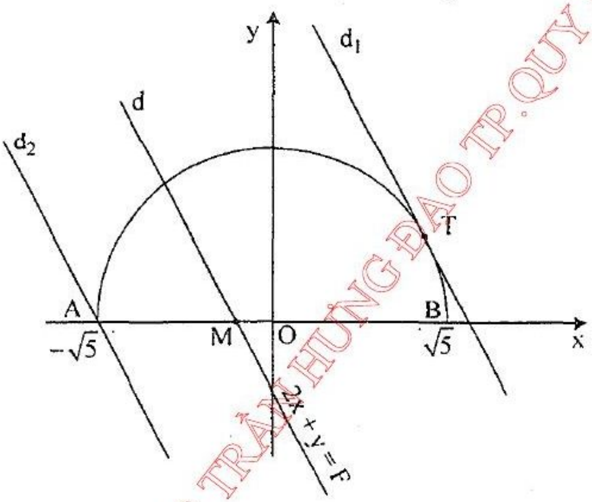
$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ y\ge 0\end{cases} \qquad (*)$$

$2x + y = F$ xác định một đường thẳng d phụ thuộc vào tham số F. Điều kiện (*) xác định nửa đường tròn (C). Các điểm $A(-\sqrt{5}\ ; 0)$, $B(\sqrt{5}\ ; 0)$ là đầu mút đường kính của (C) trên trục Ox. Đường thẳng d_1 có phương trình $2x + y = 5$ tiếp xúc với (C) tại T(2 ; 1). Các đường thẳng d_2, d_3 cùng phương với d đi qua A, B có phương trình tương ứng là $2x + y = -2\sqrt{5}$, $2x + y = 2\sqrt{5}$. Dải mặt phẳng Q với biên d_1, d_2 được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} 2x + y \geq -2\sqrt{5} \\ 2x + y \leq 5. \end{cases}$$

Vì B thuộc Q, nên d_3 nằm trong Q mà Q chứa (C). Biên của Q cắt Ox tại các điểm $M_1(-\sqrt{5}\ ; 0)$ và $M_2(\frac{5}{2}\ ; 0)$.

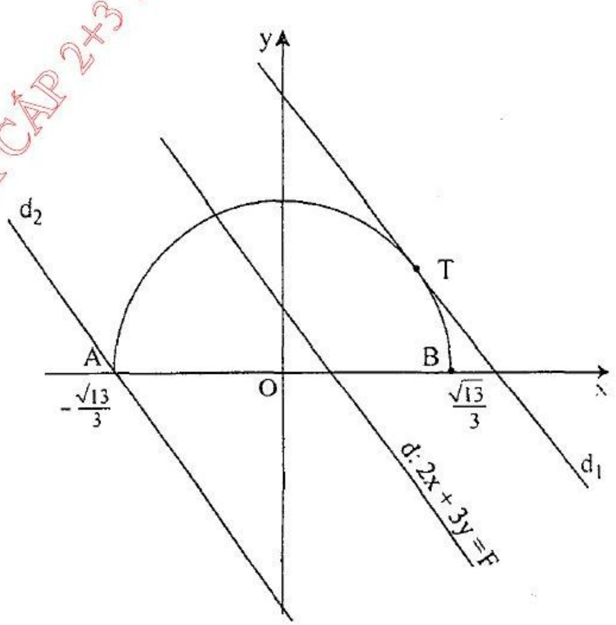
Đường thẳng d cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại $M(\frac{F}{2}; 0)$. Từ đó ta tìm được max $F = 5$ đạt tại $x = 2$; $y = 1$ và min $F = -2\sqrt{5}$ đạt tại $x = -\sqrt{5}$; $y = 0$.



Hình 47

2. (H.48) Đặt $y = \sqrt{\frac{13}{9} - x^2}$, ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = 2x + 3y$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13}{9} \\ \frac{\sqrt{13}}{3} \geq y \geq 0. \end{cases}$$



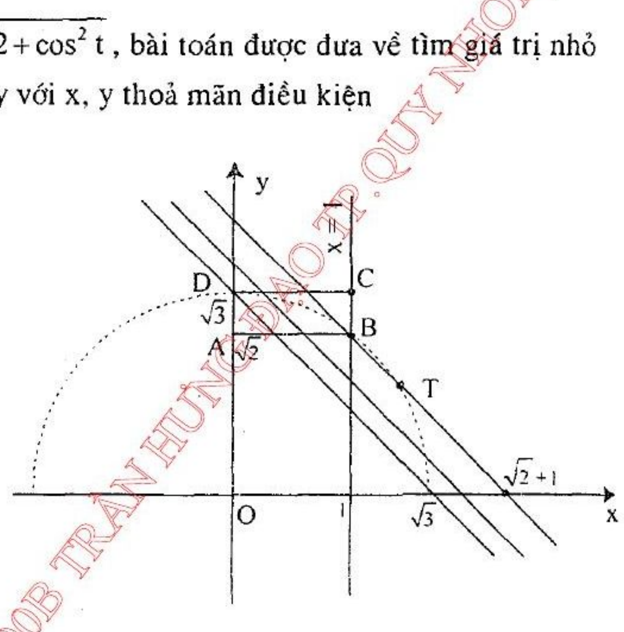
Hình 48

ĐS : $\min F = -\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$ đạt tại $x = -\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ và $\max F = \dfrac{13}{3}$ đạt tại $x = \dfrac{2}{3}$.

3. (H.49) Đặt $x = \sin t$ và $y = \sqrt{2+\cos^2 t}$, bài toán được đưa về tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = x + y$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$(*)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{2} \le y \le \sqrt{3}. \end{cases}$$

(*) là điều kiện xác định phần chung của một đường tròn và miền chữ nhật với các đỉnh $A(0\ ;\sqrt{2})$, $B(1\ ;\ \sqrt{2})$, $C(1\ ;\ \sqrt{3})$, $D(0\ ;\ \sqrt{3})$. Đó là cung nhỏ nối hai điểm B và D.



Hình 49

Dải mặt phẳng chứa cung $\overset{\frown}{BD}$ có biên là các đường thẳng $x + y = \sqrt{3}$ và $x + y = \sqrt{2} + 1$.

4. Biến đổi F về dạng

$$F = 2\sqrt{13-(z-2)^2} - 3z \text{ và đặt } x = z - 2,\ y = \sqrt{13 - x^2}.$$

Ta tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = -3x + 2y - 6$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 0 \le y \le \sqrt{13}. \end{cases} \qquad (*)$$

Điều kiện (*) xác định nửa đường tròn nằm phía trên Ox. Dải mặt phẳng nhỏ nhất chứa nó có biên là các đường thẳng $3x - 2y + 13 = 0$ và $3x - 2y - 3\sqrt{13} = 0$.

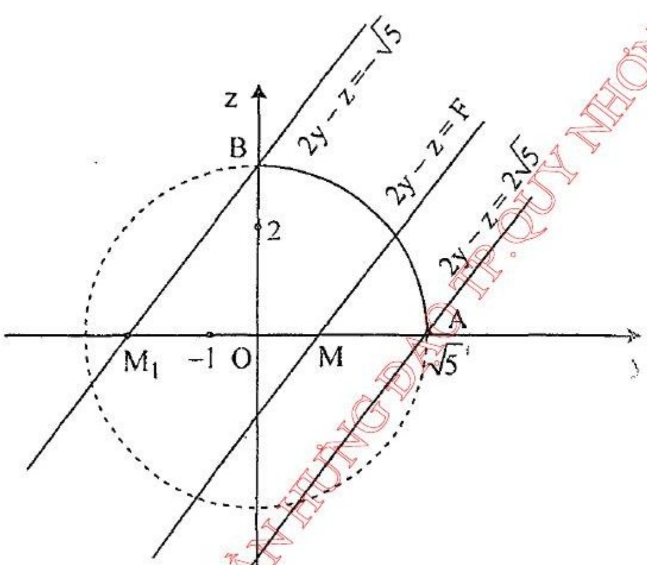
5. (H.50) Đặt $y = \sqrt{4-x}$, $z = \sqrt{1+x}$ ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = 2y - z$ với y, z thoả mãn điều kiện

$$(*)\quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 5 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

(*) là điều kiện xác định một phần tư đường tròn. Dải mặt phẳng nhỏ nhất chứa nó có biên là các đường thẳng

$2y - z = -\sqrt{5}$ và

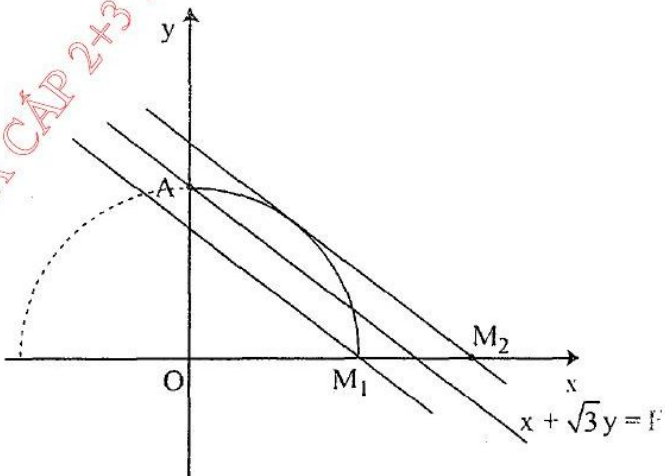
$2y - z = 2\sqrt{5}$.



Hình 50

6. (H.51) Đặt $x = \sqrt{4-a}$, $y = \sqrt{\frac{1}{3}+a}$, hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = x + \sqrt{3}y$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{13}{3} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$



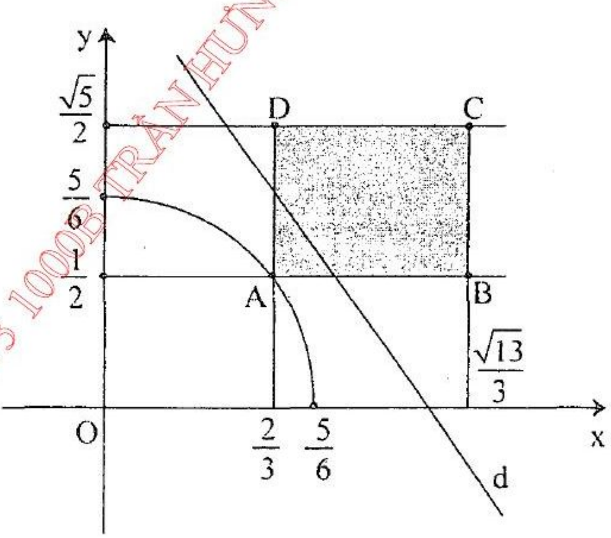
Hình 51

(*) là điều kiện xác định một phần tư đường tròn. Dải mặt phẳng nhỏ nhất chứa nó có biên là các đường thẳng : $x + \sqrt{3}y = \sqrt{\frac{13}{3}}$, $x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Các biên của dải cắt Ox tại các điểm $M_1(\sqrt{\frac{13}{3}}\,;\,0)$ và $M_2(2\sqrt{\frac{13}{3}}\,;\,0)$. Từ đó ta suy ra $\min F = \sqrt{\frac{13}{3}}$ đạt tại $x = \sqrt{\frac{13}{3}}$, $y = 0$ và $\max F = 2\sqrt{\frac{13}{3}}$ đạt tại $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$, $y = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

7. (H.52) Đặt $x = \sqrt{\frac{4}{9} + \cos^2 t}$, $y = \sqrt{\frac{1}{4} - \cos^2 t}$ và đưa bài toán về tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $F = 3x + 2y$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$(*)\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{36} \\ \frac{2}{3} \le x \le \frac{\sqrt{13}}{3} \\ \frac{1}{2} \le y \le \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$



Hình 52

(*) là điều kiện trên xác định phần chung của đường tròn và miền chữ nhật với các đỉnh

$$A(\frac{2}{3};\frac{1}{2}),\ B(\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{1}{2}),\ C(\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{5}}{2}),\ D(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{5}}{2}).$$

Ta thấy rằng đỉnh A thuộc đường tròn các đỉnh còn lại nằm ngoài đường tròn. Với mọi điểm M(x ; y) thuộc hình chữ nhật ABCD thì phương tích của M đối với đường tròn dương. Điều đó chứng tỏ phần chung của đường tròn và hình chữ nhật ABCD là điểm A. Do đó F chỉ có giá trị duy nhất là F = 3.

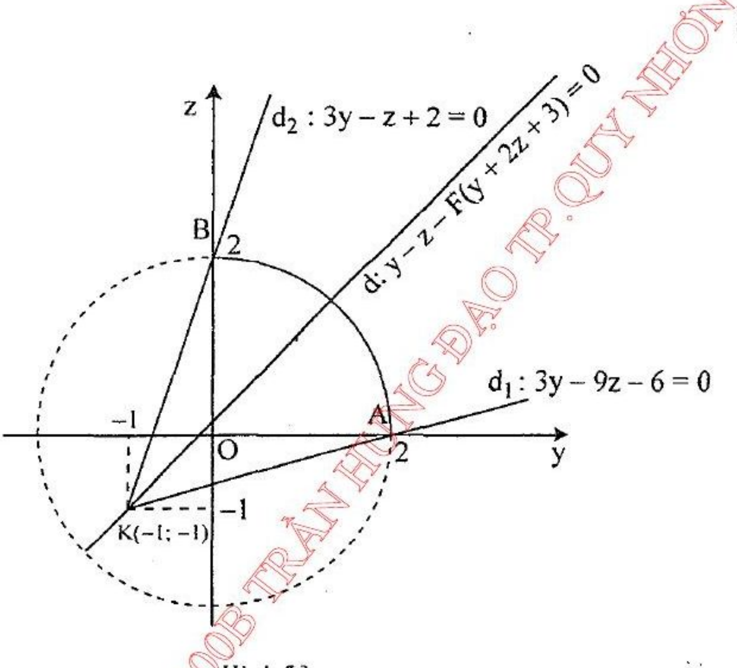
8. (H.53) Đặt $y = \sqrt{3-x}$, $z = \sqrt{1+x}$, ta tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của

$$F = \frac{y-z}{y+2z+3}.$$

Với y, z thoả mãn điều kiện

$$(*) \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

(*) là điều kiện trên là một phần tư đường tròn. Miền góc nhỏ nhất chứa nó có biên là các đường thẳng 3y – 9z – 6 = 0, 3y – z + 2 = 0.



Hình 53

9. Đặt $x = \sqrt{3-a}$, $y = \sqrt{1+a}$ hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$F = \frac{x-2}{y+1} \text{ với x, y thoả mãn điều kiện } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Miền góc nhỏ nhất chứa một phần tư đường tròn có biên là x – 2 = 0 và 3x + 2y – 4 = 0.

10. Đặt $y = \sqrt{1-x^2}$, bài toán được chuyển về tìm min và max của biểu thức $F = \dfrac{y+1}{2x+3}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \qquad (*)$$

(*) là phương trình nửa đường tròn nằm phía trên Ox. Miền góc nhỏ nhất chứa nó có biên là các đường thẳng 2x – 5y – 2 = 0 và 12x – 5y + 13 = 0.

11. Đặt $y = \sqrt{9-x^2}$ khi đó $F = \dfrac{x-2}{y+5}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 0 \le y \le 3. \end{cases}$$

Miền góc nhỏ nhất chứa nửa đường tròn có các biên là các đường thẳng $x + y + 3 = 0$ và $5x - y - 15 = 0$.

12. Đặt $y = \sqrt{4-x^2}$ khi đó $F = \dfrac{x+1}{y-x-3}$ với x, y thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 0 \le y \le 2. \end{cases}$$

Miền góc nhỏ nhất chứa tập hợp điểm thoả mãn điều kiện trên có biên là các đường thẳng $y - 2 = 0$ và $4x - 3y + 10 = 0$.

13. Đặt $y = \sqrt{\dfrac{4}{9}-x^2}$ hãy tìm min và max của $F = \dfrac{3y+1}{2x+3}$ với x, y thoả mãn

điều kiện $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{4}{9} \\ 0 \le x \le \dfrac{2}{3} \\ 0 \le y \le \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Biên của miền góc nhỏ nhất chứa tập hợp điểm thoả mãn điều kiện đã cho có biên có phương trình là $6x - 39y - 4 = 0$ và $2x - 3y + 2 = 0$.

14. Đặt $y = \sqrt{\dfrac{9}{4}-x^2}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = \dfrac{x-2}{2y+1}$ với x, y thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{9}{4} \\ 0 \le y \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

CHUYÊN ĐỀ 19

KHẢO SÁT HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẠNG TUYẾN TÍNH VÀ PHÂN TUYẾN TÍNH

Bài toán 1. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r \\ ax + by = c \end{cases}$$

với a, b, c và r là các hằng số cho trước, $(r > 0)$.

Phân tích. Hệ phương trình đã cho gồm phương trình của đường tròn (C) và phương trình của đường thẳng d. Việc khảo sát số nghiệm của hệ phương trình được đưa về khảo sát số điểm chung của d và (C). Ta biết rằng số điểm chung đó không lớn hơn 2.

Cách 1. Lập công thức tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng d. Biện luận số giao điểm của đường thẳng và đường tròn bằng cách so sánh khoảng cách đó với bán kính của (C).

Cách 2. Tìm dải mặt phẳng P hoặc miền góc $\widehat{Q}$ nhỏ nhất chứa (C). Biện luận vị trí của đường thẳng d đối với các miền phẳng đó. Nếu phát hiện đường thẳng đi qua một điểm nằm trong đường tròn thì hệ phương trình luôn có nghiệm phân biệt.

Bài toán 2. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-p)^2 + (y-q)^2 = r \\ ax + by = c \end{cases}$$

với a, b, c và r là các hằng số cho trước, $(r > 0)$.

Phương pháp. Đặt $u = x - p$, $v = y - q$, bài toán được đưa về Bài toán 1.

Bài toán 3. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} px^2 + qy^2 = r \\ ax + by = c \end{cases}$$

với a, b, c, p, q, r cho trước ($p > 0$, $q > 0$, $r > 0$).

Phân tích. Hệ phương trình đã cho gồm phương trình của đường elip (E) và phương trình của đường thẳng d. Việc khảo sát số nghiệm của hệ phương trình được đưa về khảo sát số điểm chung của d và (E). Sử dụng phép co - dãn biến (E) thành đường tròn (C), biến d thành d' và chuyển việc khảo sát số điểm chung của d với (E) thành khảo sát số điểm chung của d' với (C). Ta biết rằng số điểm chung đó không lớn hơn 2.

Phương pháp. Đặt $u = x$, $v = \sqrt{\frac{q}{p}}y$, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \dfrac{r}{p} \\ au + \left(b\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right)v = c. \end{cases} \quad (*)$$

Hệ (*) gồm phương trình của một đường tròn (C) và phương trình của đường thẳng d. Khảo sát số giao điểm của d và (C). Nếu phát hiện đường thẳng đi qua một điểm nằm trong (E) thì hệ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài toán 4. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} p(x-k)^2 + q(y-h)^2 = r \\ ax + by = c \end{cases}$$

với a, b, c, k, h, p, q, r cho trước ($p > 0$, $q > 0$, $r > 0$).

Phương pháp. Đặt $u = x - k$, $v = y - h$ và đưa bài toán về Bài toán 3.

Bài toán 5. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} px^2 + kxy + qy^2 = r \\ ax + by = c \end{cases}$$

với a, b, c, p, q, r cho trước ($p > 0, q > 0, r > 0$) và $k = \pm 1$.

Phương pháp. Biến đổi phương trình

$$px^2 + kxy + qy^2 = r$$

về dạng $mu^2 + nv^2 = r$. Bài toán 5 được đưa về Bài toán 4.

Bài toán 6. Khảo sát tính chất nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r \\ ax + by = c. \end{cases}$$

với a, b, c và r là các hằng số cho trước, ($r > 0$).

Phương pháp. Coi mỗi nghiệm của hệ phương trình là một điểm với toạ độ là cặp số đó. Biến đổi hệ phương trình và điều kiện của hệ thành ý nghĩa hình học. Điều kiện bài toán thường liên quan đến một số tính chất như tập hợp điểm thuộc phần chung của các nửa mặt phẳng hoặc miền tròn, miền elip hoặc khoảng cách giữa hai điểm, tích vô hướng của hai vectơ được lập ra từ các điểm đó, số đo góc tạo bởi hai vectơ hoặc hai đường thẳng.

Bài toán 7. Khảo sát tính chất nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} px^2 + qy^2 = r \\ ax + by = c \end{cases}$$

với a, b, c, p, q, r cho trước ($p > 0, q > 0, r > 0$).

Phương pháp. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{p}x \\ v = \sqrt{q}y \end{cases}$ hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$\begin{cases} u^2 + v^2 = r \\ a'u + b'v = c \end{cases}$, ở đó $a' = \dfrac{a}{\sqrt{p}}, b' = \dfrac{b}{\sqrt{q}}$. Bài toán được đưa về Bài toán 6.

BÀI TẬP

Từ bài 1 đến bài 17, hãy biện luận số nghiệm của các hệ phương trình theo tham số m.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = m. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x + my = m + 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + my = m + 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ x + 2y = m. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ x + my = m + 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ x + my = 3 - 2m. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 5 \\ x + 3y = m. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 49 \\ x + my = 1 - 2m. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 5 \\ x + my = m - 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = m \\ x + 3y = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 4 \\ x - 3y = m. \end{cases}$

13. $\begin{cases} (x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 4 \\ mx - 3y = m + 6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} (x-m)^2 + 9(y+1)^2 = 4 \\ x - 3y = 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = 21 \\ x + y = m. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = m \\ x + \sqrt{\frac{3}{7}}y = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = 21 \\ x + my = 2 - m. \end{cases}$

18. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm thoả mãn điều kiện $x > 0$ và $y > 0$.

19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x - y = m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm thoả mãn điều kiện $x > 0$ và $y > 1$.

20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x - my = m + 2. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có nghiệm thoả mãn điều kiện $x \le 0$ và $y \ge 0$.

21. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + my = m + 2. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có hai nghiệm thoả mãn điều kiện $y \ge 0$.

22. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + my = m + 2. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có hai nghiệm phân biệt $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ sao cho biểu thức $F = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ nhỏ nhất.

23. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + my = m + 2. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có hai nghiệm phân biệt $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

24. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có hai nghiệm phân biệt $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2 + y_1y_2 = -2$.

25. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ có hai nghiệm phân biệt $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2 + y_1y_2 > 0$.

26. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=16 \\ 2x-y=m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm thoả mãn điều kiện $x>0$ và $y>0$.

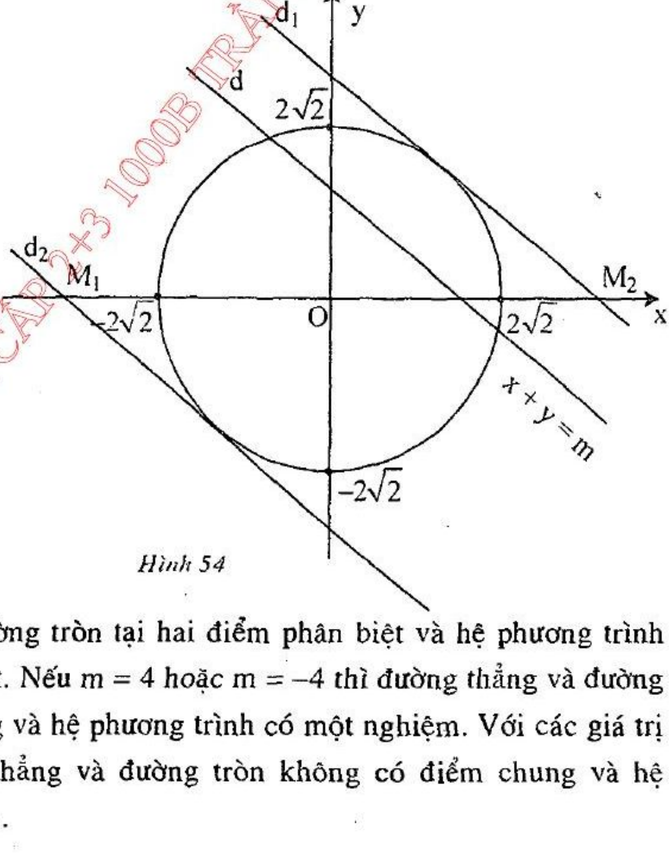
27. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=16 \\ x-my=m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1\,;\,y_1)$, $(x_2\,;\,y_2)$ thoả mãn điều kiện $(x_1-x_2)^2+4(y_1-y_2)^2=3$.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. ***Lời giải 1.*** (H.54) Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) với tâm $O(0\,;\,0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng d. Khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng d là

$$h=\frac{|m|}{\sqrt{2}}.$$



Hình 54

Nếu $h<R \Leftrightarrow |m|<4$ thì đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt và hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt. Nếu $m=4$ hoặc $m=-4$ thì đường thẳng và đường tròn có một điểm chung và hệ phương trình có một nghiệm. Với các giá trị còn lại của m đường thẳng và đường tròn không có điểm chung và hệ phương trình vô nghiệm.

Lời giải 2. Gọi d_1, d_2 là các tiếp tuyến của (C) cùng phương với đường thẳng $x + y = 0$. Phương trình của chúng là $x + y = 4$, $x + y = -4$. Xét dải mặt phẳng P với biên d_1, d_2 chứa (C). Biên của P cắt trục Ox tại các điểm $M_1(-4 ; 0)$, $M_2(4 ; 0)$. Đường thẳng $x + y = m$ cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại điểm $M(m ; 0)$. Nếu $-4 < m < 4$ đường thẳng đó có hai điểm chung phân biệt với (C) và hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt. Với $m = 4$ hoặc $m = -4$ đường thẳng tiếp xúc với (C) và hệ phương trình có một nghiệm. Với các giá trị còn lại của m hệ phương trình vô nghiệm.

2. Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) và phương trình của đường thẳng d phụ thuộc vào m. Ta thấy rằng d đi qua điểm cố định $A(1 ; 1)$ nằm trong đường tròn. Vì vậy d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt với mọi m. Hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

3. Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) có bán kính phụ thuộc vào m và đường thẳng d.

Nếu $m \leq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm. Ta xét $m > 0$. Khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng d bằng $\sqrt{2}$. Nếu $0 < m < 2$ thì đường thẳng và đường tròn không có điểm chung và hệ phương trình vô nghiệm. Nếu $m = 2$ thì đường thẳng tiếp xúc với đường tròn và hệ có một nghiệm. Nếu $m > 2$ thì đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt và hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

4. *Lời giải 1.* Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) và phương trình đường thẳng d phụ thuộc vào m. Ta thấy rằng d đi qua điểm $A(2 ; 1)$ với mọi m và A nằm ngoài (C). Khoảng cách từ tâm của (C) đến đường thẳng d bằng $\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$. Bán kính của (C) bằng 2.

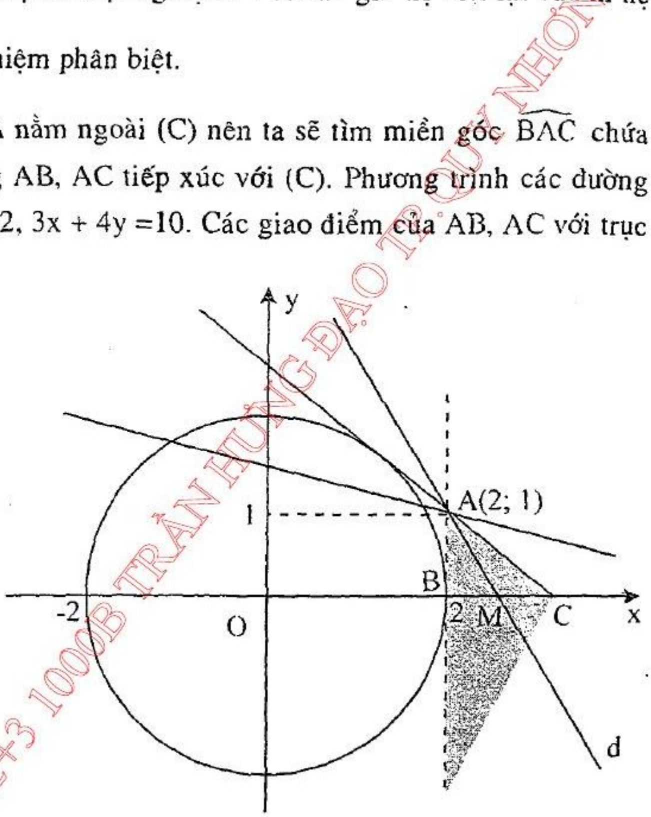
Nếu $\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} > 2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu m = 0, m = $\frac{4}{3}$ thì hệ có một nghiệm. Với các giá trị còn lại của m hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải 2. (H.55) Vì A nằm ngoài (C) nên ta sẽ tìm miền góc $\widehat{BAC}$ chứa (C) và các đường thẳng AB, AC tiếp xúc với (C). Phương trình các đường thẳng AB và AC là $x = 2$, $3x + 4y = 10$. Các giao điểm của AB, AC với trục Ox là B(2; 0) và C($\frac{10}{3}$; 0). Miền góc $\widehat{BAC}$ (phần tô màu đậm) được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ 3x + 4y \le 10. \end{cases} \quad (*)$$

Rõ ràng tâm của (C) không thoả mãn (*). Vì vậy miền góc $\widehat{BAC}$ không chứa (C).



Hình 55

Gọi M (m + 2 ; 0) là giao điểm của d với đoạn thẳng BC (khác B và C). Nếu

$$2 < m + 2 < \frac{10}{3} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$$

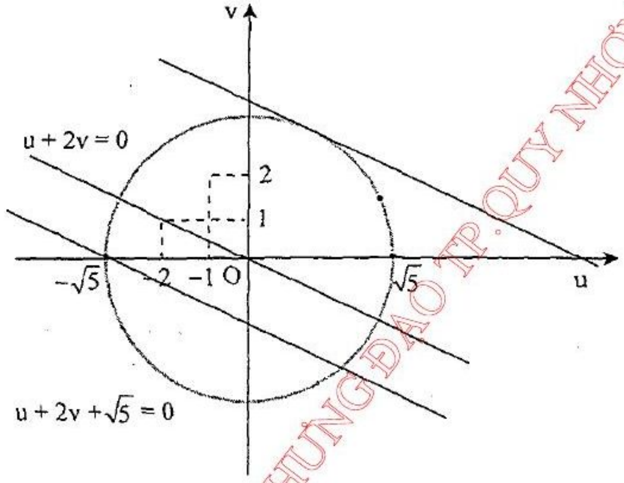
thì hệ phương trình vô nghiệm. Nếu m = 0 hoặc m = $\frac{4}{3}$ thì hệ phương trình có một nghiệm. Với các giá trị còn lại của m hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

5. (H.56) Đặt u = x − 1, v = y − 2 và hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ u + 2v = m - 5. \end{cases}$$

6. Đặt u = x − 1, v = y − 2 và hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ u + mv = -m. \end{cases} \qquad (*)$$



Hình 56

Hệ (*) gồm phương trình đường tròn (C) và phương trình của đường thẳng d phụ thuộc m. Đường thẳng đó đi qua điểm cố định A(0 ; −1) nằm trong (C) nên d cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

8. Đặt u = x, $v = \frac{3}{2}y$, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{5}{4} \\ u + 2v = m. \end{cases} \qquad (*)$$

Biện luận số nghiệm của hệ (*) theo m.

9. Đặt u = 2x, v = 3y hệ phương trình ban đầu tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 49 \\ \frac{u}{2} + m\frac{v}{3} = 1 - 2m. \end{cases}$$

Hãy khảo sát hệ phương trình theo u, v.

10. Đặt u = 2x, v = 3y hệ phương trình ban đầu tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+v^2=5 \\ \dfrac{u}{2}+m\dfrac{v}{3}=m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=5 \\ 3u+2mv=6(m-1). \end{cases}$$

Hãy khảo sát hệ phương trình theo **u**, v.

11. Đặt u = x, $v = \dfrac{3}{2}y$, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+v^2=\dfrac{m}{4} \\ u+2v=2. \end{cases} \qquad (*)$$

12. Đặt u = x − 2, v = y + 1, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+9v^2=4 \\ u-3v=m-5. \end{cases}$$

Đặt z = 3v khi đó hệ trên tương đương với hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} u^2+z^2=4 \\ u-z=m-5. \end{cases}$$

13. Đặt u = x − 2, v = 3(y + 1), hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

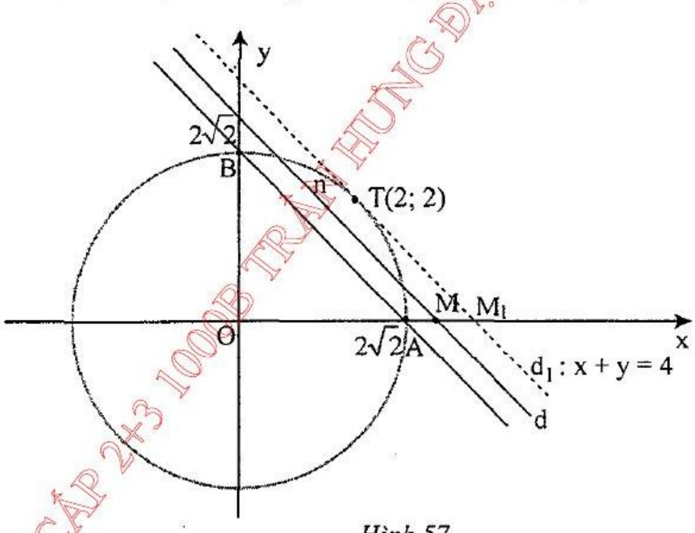
$$\begin{cases} u^2+v^2=4 \\ m(u+1)-(v+3)=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Hệ (*) gồm phương trình đường tròn và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Đường thẳng đó đi qua điểm A(−1; −3) với mọi m và A nằm ngoài đường tròn. Hãy tìm miền góc BAC với AB, AC tiếp xúc với đường tròn và chứa đường tròn đó.

14. Đặt u = x − m, v = 3(y + 1) hệ phương trình ban đầu tương đương với hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u - v = -m - 1. \end{cases}$

15. Đặt x = 2(u + v), y = u − v, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình sau đây $\begin{cases} 6u^2 + 10v^2 = 21 \\ 3u + v = m. \end{cases}$

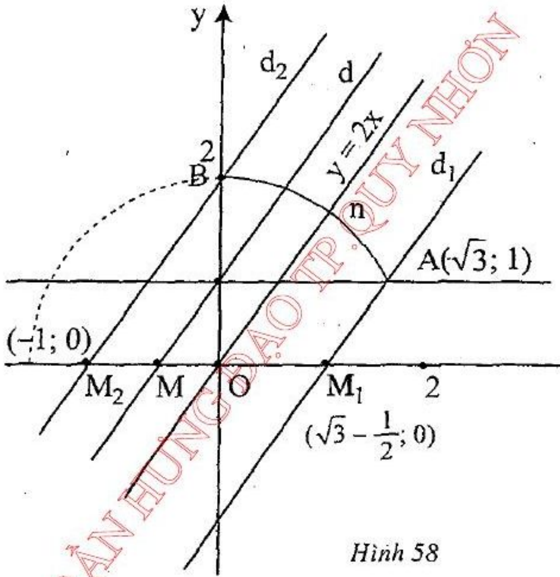
18. (H.57) Điều kiện của bài toán xác định miền góc P ứng với $x < 0$, $y > 0$. Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Phần chung của (C) và P là cung $\overset{\frown}{AnB}$ không tính các đầu mút $A(2\sqrt{2}\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2\sqrt{2})$ thuộc P. Yêu cầu của bài toán là tìm tất cả các giá trị của m để d và cung $\overset{\frown}{AnB}$ có ít nhất một điểm chung. Phương trình đường thẳng AB là $x + y = 2\sqrt{2}$ do đó AB cùng phương với d. Vì đường thẳng AB cắt (C) tại hai điểm A, B nên $\overset{\frown}{AnB}$ nằm về một phía đối với đường thẳng AB. Tiếp tuyến d_1 của $\overset{\frown}{AnB}$ cùng phương với d có phương trình $x + y = 4$ và T(2 ; 2) là tiếp điểm tương ứng. Vì vậy $\overset{\frown}{AnB}$ nằm về một phía đối với d_1. Gọi Q là dải mặt phẳng với biên AB và d_1, ta thấy rằng Q chứa $\overset{\frown}{AnB}$. Các điểm $A(2\sqrt{2}\ ;\ 0)$, $M_1(4\ ;\ 0)$ là giao điểm của biên Q với trục Ox. Điểm M(m ; 0) là điểm chung của d với đoạn thẳng AM_1 (khác A).



Hình 57

Từ đó ta suy ra rằng $2\sqrt{2} < m \leq 4$ là các giá trị cần tìm thoả mãn yêu cầu bài toán.

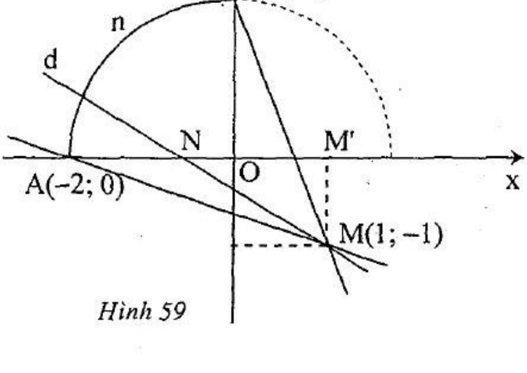
BỒI DƯỠNG TOÁN LÝ HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP. QUY NHƠN



Hình 58

19. (H.58) Điều kiện của bài toán xác định miền góc P với $x > 0$ và $y > 1$. Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Phần chung của (C) và P là cung $\overset{\frown}{AnB}$ có các đầu mút A($\sqrt{3}$; 1), B(0 ; 2). Yêu cầu của bài toán là tìm tất cả các giá trị của m để d và cung $\overset{\frown}{AnB}$ có ít nhất một điểm chung. Phương trình các đường thẳng d_1, d_2 đi qua các điểm A, B cùng phương với d là $2x - y = 2\sqrt{3} - 1$, $2x - y = -2$. Các đường thẳng đó cắt trục Ox tại các điểm $M_1(\sqrt{3} - \frac{1}{2}$; 0), $M_2(-1$; 0). Các điểm đó nằm trong (C), nên các giao điểm thứ hai của chúng với (C) thuộc nửa mặt phẳng $P_1 = \{(x; y) : y < 0\}$. Vì vậy, d_1, d_2 chỉ có duy nhất một điểm chung với $\overset{\frown}{AnB}$ là A và B. Gọi Q là dải mặt phẳng với biên d_1, d_2 khi đó Q chứa $\overset{\frown}{AnB}$. Đường thẳng d cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại điểm M($\frac{m}{2}$; 0) khác M_1 và M_2. Từ đó suy ra $-2 < m < 2\sqrt{3} - 1$ là tập hợp các giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

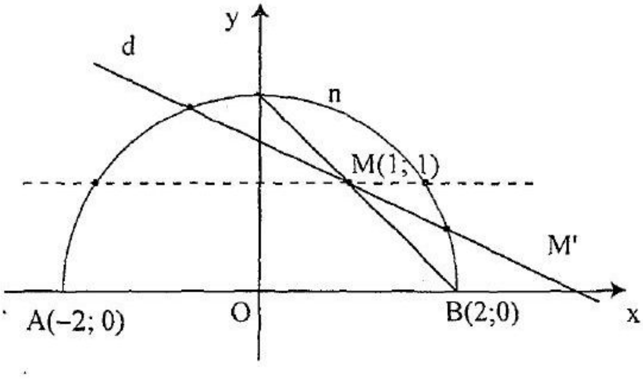
20. (H.59) Điều kiện của bài toán xác định miền góc P với biên nằm trên các trục toạ độ.



Hình 59

Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Phần chung của (C) và P là cung $\overset{\frown}{AnB}$ có các đầu mút A(–2 ; 0), B(0 ; 2) thuộc biên P. Yêu cầu của bài toán là tìm tất cả các giá trị của m để d và cung $\overset{\frown}{AnB}$ có ít nhất một điểm chung. Đường thẳng d đi qua điểm M(1; –1) nằm trong (C). Phương trình các đường thẳng MA và MB là $x + 3y = -2$ và $3x + y = 2$. Các đường thẳng đó cắt Ox tại các điểm A và M'$(\frac{2}{3}; 0)$. Điểm M nằm trong (C) và cắt Ox nên giao điểm thứ hai của đường thẳng MB với (C) thuộc nửa mặt phẳng $P_1 = \{(x; y) : y < 0\}$. Tia AM thuộc $P_1 = \{(x; y) : y < 0\}$ nên giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với (C) thuộc $P_1 = \{(x; y) : y < 0\}$. Vì vậy các đường thẳng MA và MB chỉ có một điểm chung với $\overset{\frown}{AnB}$. Miền góc AMB chứa $\overset{\frown}{AnB}$. Đường thẳng d cắt đoạn thẳng AM' tại N$(\frac{m+2}{2}; 0)$. Từ đó ta suy ra $-2 \le \frac{m+2}{2} \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow -6 \le m \le -\frac{2}{3}$.

21. (H.61) Điều kiện của bài toán xác định nửa mặt phẳng $P = \{(x; y) : y \ge 0\}$. Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Phần chung của (C) và P là cung $\overset{\frown}{AnB}$ có các đầu mút A(–2 ; 0), B(2 ; 0) thuộc biên P và AB là đường kính của (C). Yêu cầu của bài toán là tìm tất cả các giá trị của m để d và cung $\overset{\frown}{AnB}$ có hai điểm chung phân biệt. Đường thẳng d đi qua điểm M(1 ; 1) nằm trong (C). Vì vậy d cắt (C) tại hai điểm phân



Hình 61

biệt với mọi m. Vì d đi qua điểm M thuộc P nên các giao điểm của d và (C) thuộc P khi và chỉ khi d // Ox hoặc d cắt Ox tại điểm M' không nằm trên đường kính AB.

Nếu d // Ox thì trường hợp này không tồn tại giá trị nào của m.

Nếu d cắt Ox tại M'$(\frac{m+2}{2}\ ;\ 0)$ nằm ngoài đoạn thẳng AB thì ta có bất phương trình $\left|\frac{m+2}{2}\right| \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -6, m \geq 2$.

22. Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Gọi A, B là các giao điểm của d với (C) thì điều kiện của bài toán là tìm m để $F = AB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Đường thẳng d đi qua điểm M(1 ; 1), nằm trong (C) nên d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi m. Để độ dài AB nhỏ nhất cần và đủ là đường thẳng d vuông góc với đường thẳng OM (O là tâm của (C)). Vectơ $\overline{u}(-m\ ;2)$ là vectơ chỉ phương của d. Ta có d $\perp$ OM $\Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

23. Hệ phương trình gồm phương trình đường tròn (C) với tâm O(0 ; 0) và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Gọi A, B là các giao điểm của d với (C) thì điều kiện của bài toán là

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{2}.$$

Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng AB, khi đó OH = $\sqrt{2}$. Đường thẳng d đi qua điểm M(1 ; 1) nằm trong (C) nên d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi m. Khoảng cách từ O đến d bằng $\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+4}}$, buộc khoảng cách đó bằng OH, ta được phương trình $\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+4}} = \sqrt{2}$. Giải phương trình đó ta tìm được m = 2.

24. Cọi $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$, khi đó

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$= OA^2 + OB^2 + 4 = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}.$$

Khoảng cách từ O đến đường thẳng AB là 1. Hãy tìm m để đường thẳng $x + y = m$ cách điểm O một khoảng bằng 1.

25. Coi $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$, khi đó

$$x_1x_2 + y_1y_2 > 0 \Leftrightarrow \cos\widehat{AOB} > 0 \Leftrightarrow \widehat{AOB} < 90^0.$$

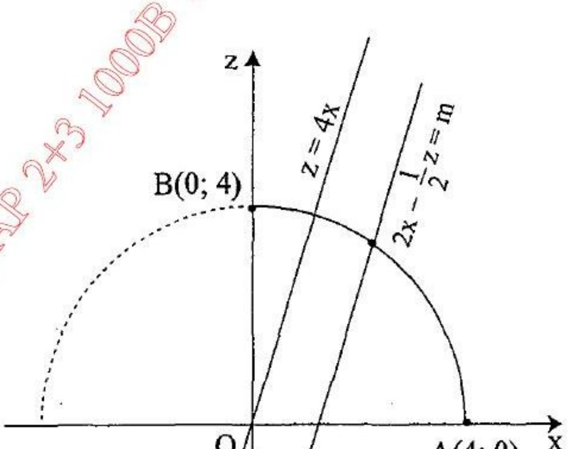
Gọi H là trung điểm của dây AB khi đó OH vuông góc với AB. Xét tam giác vuông OAH ta có $\widehat{AOH} < 45^0 \Rightarrow AH < OH$. Vì $OH^2 + AH^2 = 4$ nên $OH > \sqrt{2}$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng $x + y = m$ là $\frac{|m|}{\sqrt{2}}$ và buộc $2 > \frac{|m|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ ta tìm m thoả mãn điều kiện bài toán.

26. (H.61) Đặt $z = 2y$, hệ phương trình ban đầu tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 16 \\ 2x - \frac{1}{2}z = m. \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} x > 0 \\ z > 0. \end{cases}$$



Hình 61

27. Điều kiện của bài toán tương đương với điều kiện

$$(x_1 - x_2)^2 + (2y_1 - 2y_2)^2 = 3.$$

Hệ phương trình đã cho gồm phương trình elip (E) và đường thẳng d phụ thuộc m. Đường thẳng d đi qua điểm $A(0 ; -1)$ với mọi m. Điểm A nằm trong (E). Vì vậy d cắt (E) tại hai điểm phân biệt với mọi m và hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Ta xét các điểm $B(x_1 ; y_1)$,

$D(x_2 ; y_2)$ và đặt $u = x$, $v = 2y$ (*). Công thức (*) xác định một phép dãn với hệ số 2 bằng trục dãn Ox. Phép dãn đó biến các điểm B, D thành các điểm $B'(u_1 ; v_1)$, $D'(u_2 ; v_2)$ và hệ phương trình đã cho thành hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 16 \\ 2u - mv = 2m. \end{cases} \qquad (**)$$

Toạ độ các điểm B' và D' là nghiệm của hệ (**). Hệ (**) gồm phương trình của đường tròn (C) và phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép dãn đó. Điều kiện đã cho tương đương với $B'D'^2 = 3$. Điều đó có nghĩa là d' cắt (C) tại hai điểm B', D' sao cho $B'D' = \sqrt{3}$. Vì vậy khoảng cách từ tâm của (C) đến d' bằng $\frac{\sqrt{61}}{4}$. Từ đó ta tìm được $m = \pm\sqrt{\frac{122}{3}}$.

CHUYÊN ĐỀ 20

ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ MỘT ẨN SANG HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

Bài toán 1. Khảo sát nghiệm của phương trình $\sqrt{a-bx^2}=kx+m$ với k, m, a, b là các số thực cho trước ($a>0$, $b>0$).

Phương pháp. Đặt $y=\sqrt{\frac{a}{b}-x^2}$, khi đó phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{a}{b} \\ \sqrt{b}y=kx+m \quad (*) \\ y\geq 0. \end{cases}$$

Hãy khảo sát nghiệm của hệ (*).

Bài toán 2. Khảo sát nghiệm của phương trình $\sqrt{a-b(x+c)^2}=kx+m$ với k, m, a, b là các số thực cho trước ($a>0$, $b>0$).

Phương pháp. Đặt $z = x + c$ và $y=\sqrt{a^2+bz^2}$ và đưa bài toán đó về Bài toán 1.

Bài toán 3. Khảo sát nghiệm của phương trình asint + bcost = c với t thoả mãn điều kiện $\alpha\leq t\leq\beta$.

Phương pháp. Đặt x = sint và y = cost, khi đó phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình $\begin{cases} ax+by=c \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

với x, y thoả mãn điều kiện xác định.

Bài toán 4. Khảo sát số nghiệm của phương trình

$$p\sqrt{a+bx}+q\sqrt{c+dx}=m$$

với a, b, c, d, p, q, m cho trước thoả mãn điều kiện $b.d<0$ và $q=\pm 1$.

Phương pháp. Coi $b>0$, khi đó $d<0$. Ta đặt $y=\sqrt{\frac{a}{b}+x}$, $z=\sqrt{\frac{c}{-d}-x}$, phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{a}{b}-\frac{c}{d} \\ p\sqrt{b}y+q\sqrt{-d}z=m \\ y\geq 0 \\ z\geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Hệ (*) gồm cung tròn $\overset{\frown}{AnB}$ nằm trong miền góc P xác định bởi các miền $x\geq 0, y\geq 0$ và đường thẳng d. Hãy biện luận số nghiệm của hệ (*).

BÀI TẬP

Biện luận số nghiệm của các phương trình sau theo tham số m.

1. $\sqrt{5-x^2}+2x+m=0$.
2. $\sqrt{9-4x^2}+mx-m+2=0$.
3. $m\sqrt{9-x^2}-x+5m=0$.
4. $\sqrt{m-x^2}-2x+3=0$.
5. $\sqrt{9-2x-x^2}=x+m$.
6. $\sqrt{12+8z-4z^2}+mz+4=0$.
7. $\sqrt{5-2(z+m)^2}=z-2$.
8. $4\sin t-3\cos t=2m-1$ với $0\leq t\leq\pi$.

9. $2\sin t - (m+3)\cos t = m - 1$ với $\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.

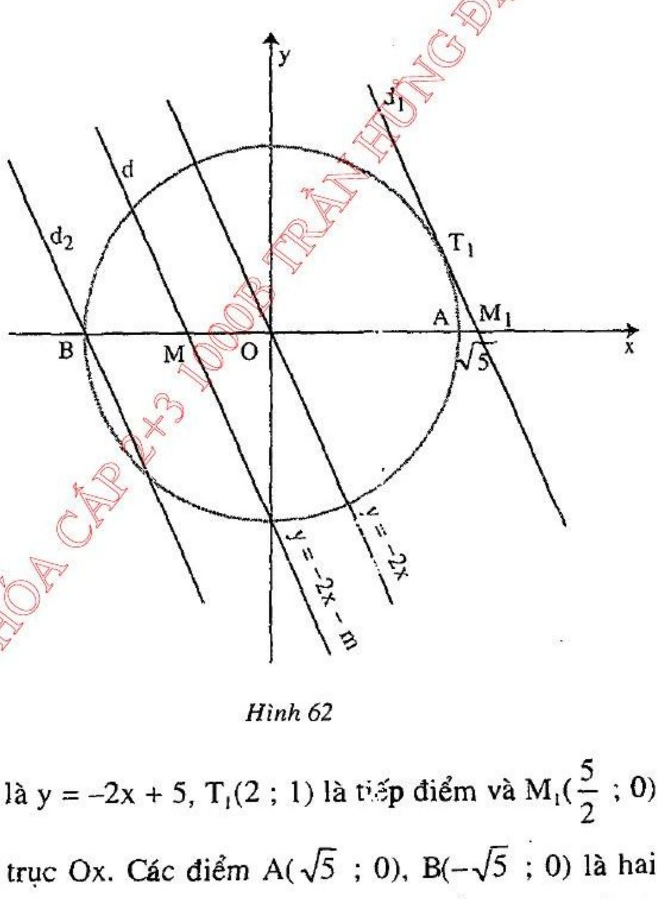
10. $\sqrt{5-4x} - \sqrt{3+x} = m$.

11. $\sqrt{5-4x} + \sqrt{m+9x} = 1$.

Đáp số - Lời giải - Hướng dẫn

1. (H.62) Đặt $y = \sqrt{5-x^2}$, phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2x - m \ (*) \\ y \ge 0. \end{cases}$$



Hình 62

Ta tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d có phương trình y = –2x – m và nửa đường tròn (C) được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

có ít nhất một điểm chung. Tiếp tuyến d_1 của (C) có phương trình là y = –2x + 5, $T_1(2 ; 1)$ là tiếp điểm và $M_1(\frac{5}{2} ; 0)$ là giao điểm của d_1 với trục Ox. Các điểm $A(\sqrt{5} ; 0)$, $B(-\sqrt{5} ; 0)$ là hai đầu mút đường kính của (C). Ký hiệu d_2, d_3 là các đường thẳng đi qua B, A cùng phương với d. Phương trình d_2 và d_3 tương ứng là $y = -2x - 2\sqrt{5}$ và $y = -2x + 2\sqrt{5}$. Dải mặt phẳng Q với biên d_1, d_2 chứa (C) và d_3. Biên của Q cắt Ox tại các điểm $M_1(\frac{5}{2}; 0)$ và B. Đường thẳng d cắt đoạn thẳng M_1B tại $M(-\frac{m}{2}; 0)$. Từ đó ta suy ra rằng :

Nếu M thuộc đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow -\sqrt{5} \le -\frac{m}{2} < \sqrt{5} \Leftrightarrow -2\sqrt{5} < m \le 2\sqrt{5}$ hoặc M trùng với $M_1 \Leftrightarrow m = -5$ thì hệ có đúng một nghiệm.

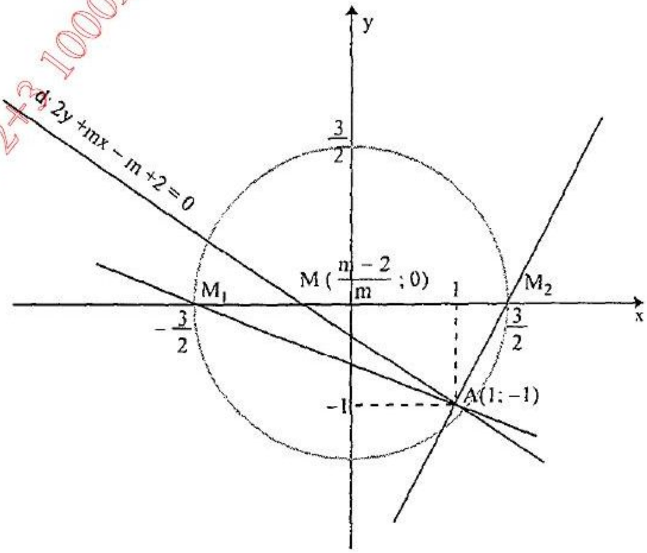
Nếu M thuộc đoạn M_1A $\Leftrightarrow \sqrt{5} \le -\frac{m}{2} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow -5 < m \le -2\sqrt{5}$ thì có hai nghiệm phân biệt.

2. (H.63) Đặt $y = \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$, phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{9}{4} \\ 2y + mx - m + 2 = 0 \quad (*) \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Hệ (*) gồm phương trình chùm đường thẳng d phụ thuộc m và nửa đường tròn (C). Đường thẳng d đi qua điểm A(1 ; −1) với mọi m và toạ độ của A là một nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > \frac{9}{4}. \\ y < 0 \end{cases}$$



Hình 63

Do đó điểm A nằm ngoài nửa đường tròn (C). Các điểm $M_1(-\frac{3}{2}\ ;\ 0)$, $M_2(\frac{3}{2}\ ;\ 0)$ là đầu mút đường kính của (C). Giao điểm của d với Ox là $M(\frac{m-2}{m}\ ;\ 0)$ với $m \neq 0$. Ta biết rằng nếu M thuộc đoạn thẳng M_1M_2 (trừ ra M_1 và M_2) thì d cắt nửa đường tròn (C) tại một điểm. Trong trường hợp này d và nửa đường tròn (C) có một điểm chung duy nhất. Vì vậy với m thoả mãn điều kiện

$$-\frac{3}{2} < \frac{m-2}{m} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \frac{1}{m} < \frac{5}{4} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{5}$$

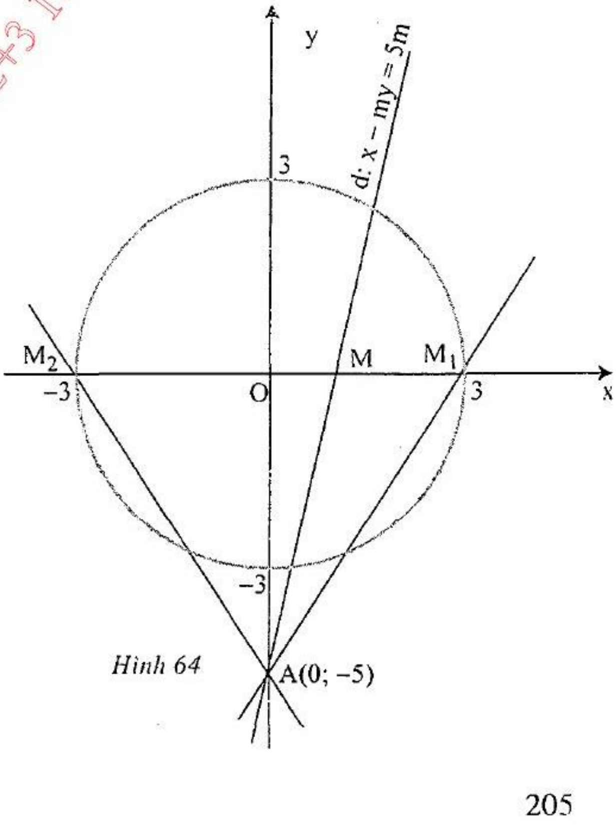
thì phương trình có đúng một nghiệm. Với m = 0 đường thẳng d // Ox nên d không cắt nửa đường tròn (C), phương trình đã cho vô nghiệm. Với các giá trị còn lại của m thì M nằm ngoài đường kính M_1M_2. Trường hợp này d không cắt nửa đường tròn (C) và phương trình đã cho vô nghiệm.

3. (H.64) Đặt $y = \sqrt{9-x^2}$, phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - my = 5m \quad (*) \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Hệ (*) gồm phương trình đường thẳng d phụ thuộc m và nửa đường tròn (C) được xác định bởi hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0. \end{cases}$$



Hình 64

Đường thẳng d đi qua điểm A(0 ; –5) với mọi m và toạ độ điểm A là một nghiệm của hệ bất phương trình

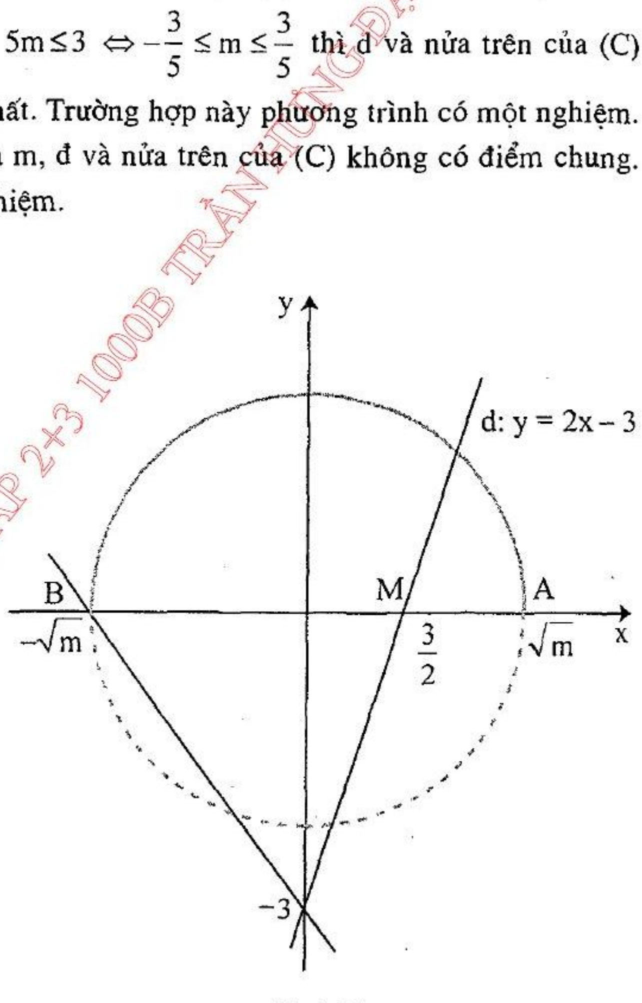
$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 9 \\ y < 0 \end{cases}$$

do đó A nằm ngoài (C). Các điểm $M_1(3 ; 0)$, $M_2(-3 ; 0)$ là đầu mút đường kính của (C). Các tia AM_1, AM_2 là biên của *miền góc P chứa của đường* tròn (C). Đường thẳng d cắt đoạn thẳng M_1M_2 tại M(5m ; 0). Vì vậy với m thoả mãn điều kiện $-3 \le 5m \le 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \le m \le \frac{3}{5}$ thì d và nửa trên của (C) có một điểm chung duy nhất. Trường hợp này phương trình có một nghiệm. Với các giá trị còn lại của m, đ và nửa trên của (C) không có điểm chung. Do đó phương trình vô nghiệm.

4. (H.65) Hiển nhiên với $m \le 0$ phương trình vô nghiệm. Do đó, ta chỉ xét tập hợp các giá trị m > 0. Đặt $y = \sqrt{m - x^2}$ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y = 2x - 3 \quad (*) \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Hệ (*) gồm phương trình đường thẳng d và nửa đường tròn (C) được xác định bởi hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y \ge 0. \end{cases}$



Hình 65

Đường thẳng d cắt trục Ox tại điểm $M(\frac{3}{2}\ ;0)$ và trục Oy tại điểm $N(0\ ;-3)$.

Các điểm $A(\sqrt{m}\ ;0)$, $B(-\sqrt{m}\ ;0)$ là đầu mút đường kính của đường tròn (C). Nếu M thuộc đường kính AB $\Leftrightarrow \frac{9}{4} < m$ thì d cắt đường tròn (C) tại hai điểm nằm khác phía đối với Ox. Trường hợp này phương trình có đúng một nghiệm. Nếu M nằm trên đường tròn (C) tương ứng với $m = \frac{9}{4}$ thì d cắt đường tròn (C) lần thứ hai tại điểm $M'(\frac{9}{10};-\frac{6}{5})$ không thuộc nửa đường tròn (C). Trường hợp này phương trình có đúng một nghiệm $x = \frac{3}{2}$. Nếu M nằm ngoài đường kính AB nghĩa là $0 < m < \frac{9}{4}$ thì hoặc d không có điểm chung với đường tròn (C) hoặc d có điểm chung với nửa dưới đường tròn (C) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ y < 0. \end{cases}$$

Trường hợp này phương trình vô nghiệm.

5. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{10-(x+1)^2} = x + m\ .$$

Đặt $z = x + 1$ và $y = \sqrt{10-z^2}$ phương trình đó tương đương với hệ

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 10 \\ y = z + m - 1 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Hãy biện luận số điểm chung của đường thẳng $y = z + m - 1$ và nửa đường tròn

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 10 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{16-4(z-1)^2} + mz + 4 = 0. \qquad (*)$$

Đặt x = z − 1 và $y = \sqrt{4 - x^2}$ phương trình (*) tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ m(x+1) + 2(y+2) = 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Hãy khảo sát số điểm chung của đường thẳng

$$m(x + 1) + 2(y + 2) = 0$$

và nửa đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \ge 0. \end{cases}$$

7. Đặt $x = \sqrt{2}(z + m)$, $y = \sqrt{5 - x^2}$ phương trình ban đầu tương đương với hệ sau đây

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - m - 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{5}. \end{cases}$$

Hãy biện luận số điểm chung của đường thẳng $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - m - 2$ và cung tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 0 \le y \le \sqrt{5}. \end{cases}$$

8. Đặt x = sint, y = cost và phương trình đã cho tương đương với hệ

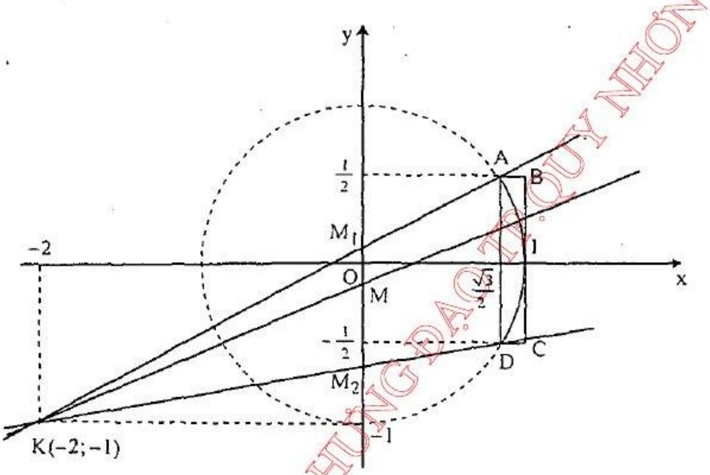
$$\begin{cases} 4x - 3y = 2m - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \ge 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Hệ (*) gồm nửa đường tròn (C) và đường thẳng d phụ thuộc vào m. Hãy khảo sát số điểm chung của đường thẳng 4x − 3y = 2m − 1 và nửa đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \ge 0. \end{cases}$$

9. (H.66) Đặt x = sint, y = cost và phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - (m+3)y = m - 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 1 \\ -\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



Hình 66

Hãy khảo sát số điểm chung của đường thẳng $2x - (m + 3)y = m - 1$ và phần chung của đường tròn đơn vị và miền chữ nhật ABCD, trong đó

$$A(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}),\ B(1\,; \frac{1}{2}),\ C(1\,; -\frac{1}{2}),\ D(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}).$$

Các đỉnh A và D thuộc đường tròn đơn vị. Các đỉnh còn lại nằm ngoài đường tròn. Miền góc chứa tập hợp điểm thoả mãn hệ điều kiện trên có biên là các đường thẳng ứng với các giá trị của

$$m = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \text{ và } m = 2\sqrt{3} + 5.$$

10. Đặt $y = \sqrt{\frac{5}{4} - x}$, $z = \sqrt{3 + x}$ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \dfrac{17}{4} \\ 2y - z = m \\ y \ge 0 \\ z \ge 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Hãy khảo sát số điểm chung của đường thẳng 2y − z = m và cung tròn

$$\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{17}{4} \\ y\ge 0 \\ z\ge 0. \end{cases}$$

11. Đặt $y=\sqrt{\dfrac{5}{4}-x}$, $z=\sqrt{\dfrac{m}{9}+x}$, phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{5}{4}+\dfrac{m}{9} \\ 2y+3z=1 \\ y\ge 0 \\ z\ge 0. \end{cases}$$

Khảo sát số điểm chung của đường thẳng $2y + 3z = 1$ và cung tròn

$$\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{5}{4}+\dfrac{m}{9} \\ y\ge 0 \\ z\ge 0. \end{cases}$$

Mục lục

Trang

Lời nói đầu 3
Chuyên đề 1. Tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối diện bằng nhau 5
Chuyên đề 2. Tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc với nhau 19
Chuyên đề 3. các đường đẳng giác trong một góc 30
Chuyên đề 4. Đường đối trung trong tam giác 43
Chuyên đề 5. Định lí Các-nô với bài toán đồng quy của ba đường thẳng 50
Chuyên đề 6. Đường thẳng Ơ-le của một tam giác 57
Chuyên đề 7. Đường tròn Ơ-le 67
Chuyên đề 8. Tứ giác toàn phần 76
Chuyên đề 9. Điểm Brôcar trong tam giác 86
Chuyên đề 10. Đường thẳng biến thiên đi qua một điểm cố định 95
Chuyên đề 11. Đường tròn biến thiên đi qua một điểm cố định 105
Chuyên đề 12. Điểm Migen của một tam giác 110
Chuyên đề 13. Tam giác Pê-đan 115
Chuyên đề 14. Ba đường cônic 129
Chuyên đề 15. Về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F = ax + by$ với a, b là hằng số và x, y thoả mãn điều kiện cho trước 142
Chuyên đề 16. Về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = \dfrac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$ với a, b, c, a', b', c' là hằng số và x, y thoả mãn điều kiện cho trước 151
Chuyên đề 17. Về giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức có dạng $F = (x - u)^2 + (y - v)^2$ với x, y, u, v thoả mãn điều kiện cho trước 164
Chuyên đề 18. Một vài dạng toán cực trị có thể đưa về dạng tuyến tính và phân tuyến tính 175
Chuyên đề 19. Khảo sát hệ phương trình chứa dạng tuyến tính và phân tuyến tính 185
Chuyên đề 20. Đưa phương trình vô tỉ một ẩn sang hệ phương trình hai ẩn 201

1b phô ngang

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Giám đốc Công ty CPDV xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Biên tập nội dung và sửa bản in :
LÊ THỊ THANH HẰNG

Chế bản :
ĐỖ THANH SƠN

Trình bày bìa :
BÙI QUANG TUẤN

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC PHẲNG BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI THPT

Mã số: C3T06h0- TTS

In 3.000 bản (QĐ: 03TK), khổ 17 x 24 cm, tại Công ty CP In Thái Nguyên.
Địa chỉ: Tổ 23 Phường Quang Trung TP Thái Nguyên tỉnh Thái Nguyên.
Số in: 300 Số XB: 24-2010/CXB/354-2242/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2010.